Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Математика в экономике. Профильный уровень

Открытый билет

Вариант 1

(с решениями)

Вопрос 1

При использовании какой ставки исходная база для начисления процентов не меняется?

a) Простой
b) Сложной
c) Постоянной
d) Переменной

Правильный ответ: Простой.

(6 баллов)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{18}$.

a) 6
b) 9
c) $\frac{1}{36}$
d) 18

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{18}$ заменим умножением на число 18. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{1\cdot 2+1\cdot 1}{6}\right)\cdot 18=\frac{3}{6}\cdot 18=\frac{1}{2}\cdot 18=9.$$

Правильный ответ: 9.

(3 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)$.

a) 13

b) 19

c) 11

d) $4\sqrt{3}$

Решение

Для нахождения значения данного выражения, необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае: $a=4$, $b=\sqrt{3}$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)=4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=16-3=13.$$

Правильный ответ: 13.

(3 балла)

Вопрос 4

Годовая ставка сложных ссудных процентов равна 12%. Через сколько лет сумма, вложенная в банк по этой ставке, удвоится? Ответ дайте в годах с точностью до целого значения. Введите полученное число без указания единиц измерения.

Решение

Чтобы найти срок удвоения вложенной суммы, можно воспользоваться приближённой оценкой – «правилом 72». Необходимо число 72 разделить на ставку, выраженную целым числом: $72/12 = 6$ лет.

Правильный ответ: 6.

(3 балла)

Вопрос 5

В условной экономике за последние 5 лет фиксировались следующие значения уровня инфляции:

Год	2020	2021	2022	2023	2024
Уровень инфляции, %	10	13	16	12	9,5

Вычислите, в каком году наблюдался самый высокий по значению темп прироста (убыли) показателя.

a) 2021 г.

b) 2022 г.

c) 2023 г.

d) 2024 г.

Решение

Сначала необходимо найти абсолютный прирост (убыль). Он равен разности между последующим и предыдущим значением.

2024 г.: 9,5 –12 = –2,5%.

2023 г.: 12 – 16 = –4%.

2022 г.: 16 – 13 = 3%.

2021 г.: 13 –10 = 3%.

Чтобы найти темп прироста (убыли), необходимо абсолютный прирост (убыль) разделить на предыдущее значение и умножить на 100%.

2024 г.: $-\frac{2,5}{12}\cdot 100\% = -20,8\%.$

2023 г.: $-\frac{4}{16}\cdot 100\% = -25\%.$

2022 г.: $\frac{3}{13}\cdot 100\% = 23\%.$

2021 г.: $\frac{3}{10}\cdot 100\% = 30\%.$

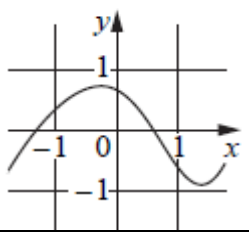
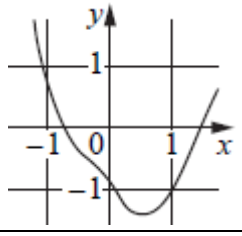
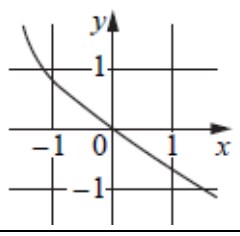
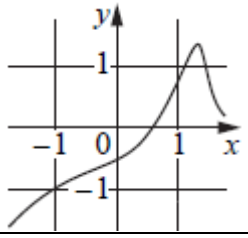
Таким образом, самый высокий по значению темп прироста (убыли) наблюдался в 2021 г.

Правильный ответ: 2021 г.

(6 баллов)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1) функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1];

2) функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1];

3) функция убывает на отрезке [−1; 1];

4) функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

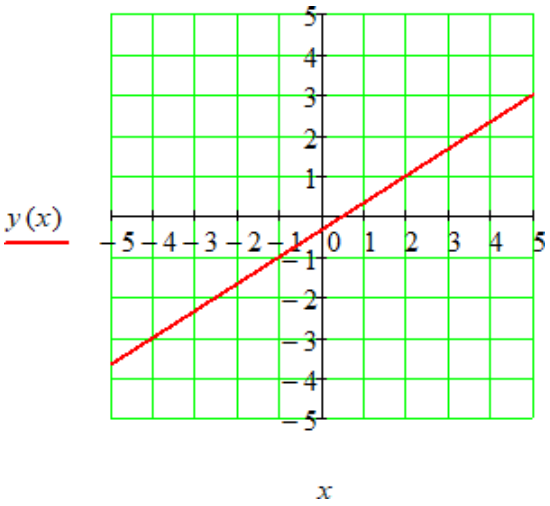
Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	3	4

(6 баллов)

Вопрос 7

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



a) $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

b) $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

c) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

d) $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

Решение

Прямая имеет вид линейной функции $y(x)=kx+b$.

Из рисунка видно, что она проходит через точку с координатами $x_1=-1$, $y_1=-1$ и точку с координатами $x_2=2$, $y_2=1$.

Подставим последовательно значения $x_1=-1$, $y_1=-1$ и $x_2=2$, $y_2=1$ в функцию $y(x)=kx+b$. Получим:

1) $-1=k\cdot(-1)+b$ или $-1=-k+b$ и 2) $1=k\cdot 2+b$ или $1=2k+b$.

Выразим из первого равенства: $k=b+1$. Подставим $k=b+1$ во второе равенство и получим b:

$$1=2(b+1)+b \Rightarrow 1=2b+2+b \Rightarrow 1-2=3b \Rightarrow b=-\frac{1}{3}.$$

Подставим $b=-\frac{1}{3}$ в $k=b+1$: $k=-\frac{1}{3}+1$ => $k=\frac{2}{3}$.

Значит, функция имеет вид: $y(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

(4 балла)

Вопрос 8

Найдите значение выражения: $\frac{30\sin 79^\circ\cdot\cos 79^\circ}{\sin 158^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$30\sin 79^\circ\cdot\cos 79^\circ = 15\cdot 2\cdot\sin 79^\circ\cdot\cos 79^\circ = 15\cdot\sin(2\cdot 79^\circ) = 15\sin 158^\circ$.

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{30\sin 79^\circ\cdot\cos 79^\circ}{\sin 158^\circ}=\frac{15\sin 158^\circ}{\sin 158^\circ}=15.$$

Правильный ответ: 15.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите уравнение: $x^2-17x+72=0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

a) 8

b) 9

c) –8

d) –9

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2+bx+c=0$ коэффициент $a=1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теоремы произведение корней равно свободному члену *c*, а сумма корней коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел = 72? Очевидно, что это числа 8 и 9. Сумма этих чисел равна 17, то есть коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. Получили: $x_1 = 8$, $x_2 = 9$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 9.

Правильный ответ: 9

(4 балла)

Вопрос 10

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x+2y=120, \\ -15x+2y=-60. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из первого уравнения системы 2*y*. Выражаем 2*y* потому что во втором уравнении также встречается 2*y*.

$2y=120-10x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение во второе уравнение и найдем *x*

$-15x+(120-10x)=-60$

$-15x+120-10x=-60$

$-25x=-60-120$

$-25x=-180$

$x=7.2$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$2y = 120 - 10 \cdot 7.2$

$2y = 120 - 72$

$2y = 48$

$y = 24$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили $y = 24$.

Правильный ответ: 24.

(3 балла)

Вопрос 11

Решите неравенство: $2x - 2(3x - 1) > 6.$

a) $x > -1$

b) $x > 1$

c) $x \le -1$

d) $x < -1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$2x - 2(3x - 1) = 6$

$2x - 6x + 2 = 6$

$-4x = 4.$

Откуда $x = -1.$

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = -1$. Одной из таких точек будет точка $x = -2$. Подставим $x = -2$ в исходное неравенство и проверим знак.

$2\cdot(-2)-2\left(3\cdot(-2)-1\right)>6$

$-4-2\cdot\left(-7\right)>6$

$10>6$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = -1$, то есть при $x < -1$.

Правильный ответ: $x<-1$.

(3 балла)

Вопрос 12

Найдите производную функции: $f(x)=x^5+2x^2+50$. В ответ запишите значение производной в точке $x=2$.

a) 88

b) 102

c) 50

d) 80

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U+V\right)'=U'+V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$f'(x)=(x^5)'+2(x^2)'+(50)'=5x^{5-1}+2\cdot2x^{2-1}+0=5x^4+4x$.

Вычислим значение производной функции в точке $x = 2$. Для этого подставим в полученную производную $x = 2$:

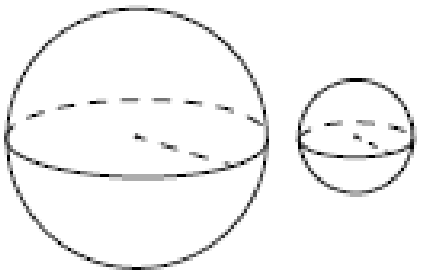
$$f'(2) = 5 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2 = 5 \cdot 16 + 8 = 88.$$

Правильный ответ: 88.

(4 балла)

Вопрос 13

Даны два шара радиусами 6 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



a) 9

b) 4

c) 3

d) 2

Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{6^2}{3^2} = \frac{36}{9} = 4.$$

Получили – площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 4 раза.

Правильный ответ: 4.

(9 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

$16 \cdot 4^{x^2+12} = 4^{-2x+22}$

Решение

Легко заметить, что число 16 можно представить следующим образом: $16 = 4^2$. С учётом этого факта перепишем уравнение в следующем виде:

$4^2 \cdot 4^{x^2+12} = 4^{-2x+22}$

Известно, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляем без изменений, а показатели степеней складываем. Соответственно выражение принимает вид:

$4^{2+x^2+12} = 4^{-2x+22}$

Чтобы найти неизвестное *x*, необходимо приравнять степени:

$2 + x^2 + 12 = -2x + 22$

Перенесем все члены уравнения в левую часть и получим квадратное уравнение, решив которое найдем неизвестные *x*:

$x^2 + 2x - 8 = 0$

Так как коэффициент при $x^2 = 1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теоремы:

$x_1 \cdot x_2 = -8,\ x_1 + x_2 = -2.$

Получаем: $x_1 = -4,\ x_2 = 2.$

По условию задачи в ответ необходимо записать сумму корней:

$-4 + 2 = -2$.

Правильный ответ: –2.

(9 баллов)

Вопрос 15

Найдите $8\cos(2\pi+\beta)+10\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta=-\frac{1}{9}$.

Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Найдите $8\cos(2\pi+\beta)+10\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta=-\frac{1}{9}$.

Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решение

Для решения данной задачи воспользуемся тригонометрическими формулами:

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Запишем $\cos(2\pi+\beta)$ в соответствии с формулой косинуса суммы углов:

$\cos(2\pi+\beta)=\cos 2\pi\cdot\cos\beta-\sin 2\pi\cdot\sin\beta$.

Известно, что $\cos 2\pi=1, \sin 2\pi=0$. Также по условию задачи задано:

$\cos\beta=-\frac{1}{9}$.

В соответствии с этим перепишем выражение:

$\cos(2\pi+\beta)=\cos 2\pi\cdot\cos\beta-\sin 2\pi\cdot\sin\beta=1\cdot\left(\frac{-1}{9}\right)-0\cdot\sin\beta=-\frac{1}{9}$.

Запишем $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ в соответствии с формулой синуса суммы углов:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\beta+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\beta.$$

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.Также по условию задачи задано:

$$\cos\beta=-\frac{1}{9}.$$

Правильный ответ: –2.

(8 баллов)

Вариант 2

(с решениями)

Вопрос 1

При использовании какой ставки исходная база для начисления процентов постоянно увеличивается?

a) Простой

b) Сложной

c) Постоянной

d) Переменной

Правильный ответ: Сложной.

(6 баллов)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\div\frac{1}{2}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{2}$ заменим умножением на число 2. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{2\cdot 2+1\cdot 5}{6}\right)\cdot 2=\frac{9}{6}\cdot 2=\frac{3}{2}\cdot 2=3.$$

Правильный ответ: 3.

(3 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(3\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(3\sqrt{15}-5\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения, необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$. В нашем случае: $a = 3\sqrt{15}$, $b = 5$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(3\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(3\sqrt{15}-5\right) = \left(3\sqrt{15}\right)^2 - 5^2 = 3^2\cdot 15 - 25 = 135 - 25 = 110.$$

Правильный ответ: 110.

(3 балла)

Вопрос 4

Согласно новому финансовому соглашению, платеж в 100 тыс. руб. со сроком уплаты 5 мая 2023 г. заменяется платежом со сроком уплаты 5 мая 2024 г. Определите величину нового платежа, если используется сложная ставка 10% годовых. Ответ введите в тысячах рублей.

Решение

Величину нового платежа необходимо вычислить по формуле:

$$100\cdot(1+\text{Ставка в виде десятичной дроби}\cdot\text{Срок переноса платежа в годах}).$$

Подставив данные в формулу, получим:

$100\cdot(1+0{,}1\cdot 1) = 110$ тыс. руб.

Правильный ответ: 110.

(3 балла)

Вопрос 5

В условной экономике за последние 5 лет фиксировались следующие значения уровня безработицы:

Год	2020	2021	2022	2023	2024
Уровень безработицы, %	7	4	6	5	3

Вычислите, в каком году наблюдался самый высокий по значению темп прироста (убыли) показателя.

a) 2021 г.

b) 2022 г.

c) 2023 г.

d) 2024 г.

Решение

Сначала необходимо найти абсолютный прирост (убыль). Он равен разности между последующим и предыдущим значением.

2024 г.: –3 –5 = –2%.

2023 г.: 5 – 6 = –1%.

2022 г.: 6 – 4 = 2%.

2021 г.: 4 – 7 = –3%.

Чтобы найти темп прироста (убыли), необходимо абсолютный прирост (убыль) разделить на предыдущее значение и умножить на 100%.

2024 г.: $-\frac{2}{5}\cdot 100\% = -40\%.$

2023 г.: $-\frac{1}{6}\cdot 100\% = -16,7\%.$

2022 г.: $\frac{2}{4}\cdot 100\% = 50\%.$

2021 г.: $-\frac{3}{7}\cdot 100\% = -42,9\%.$

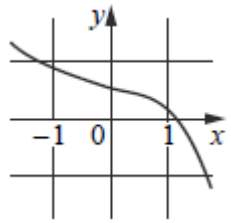
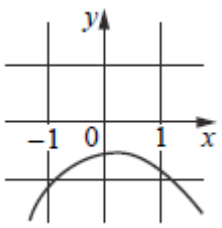
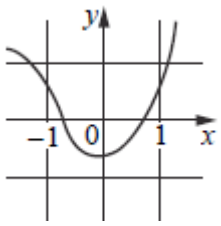
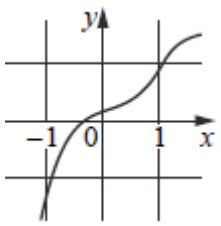
Таким образом, самый высокий по значению темп прироста (убыли) наблюдался в 2022 г.

Правильный ответ: 2022 г.

(6 баллов)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1) Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].

2) Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].

3) Функция убывает на отрезке [−1; 1].

4) Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

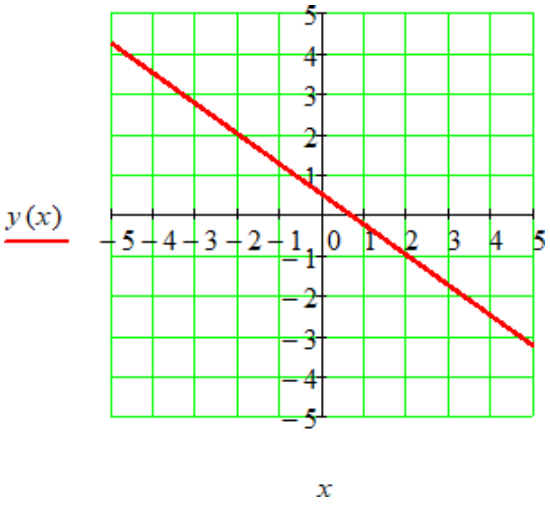
Правильный ответ:

А	Б	В	Г
3	1	2	4

(6 баллов)

Вопрос 7

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



a) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

d) $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

Решение

Прямая имеет вид линейной функции $y(x)=kx+b$.

Из рисунка видно, что она проходит через точку с координатами $x_1=2$, $y_1=-1$ и точку с координатами $x_2=-2$, $y_2=2$.

Подставим последовательно значения $x_1=2$, $y_1=-1$ и $x_2=-2$, $y_2=2$ в функцию $y(x)=kx+b$. Получим:

1) $-1=k\cdot 2+b$ или $-1=2k+b$ и 2) $2=k\cdot(-2)+b$ или $2=-2k+b$.

Выразим из второго равенства: $b=2+2k$. Подставим $b=2+2k$ в первое равенство и получим k:

$$-1=2k+(2+2k) \Rightarrow 2k+2k=-1-2 \Rightarrow 4k=-3 \Rightarrow k=-\frac{3}{4}.$$

Подставим $k=-\frac{3}{4}$ в $b=2+2k$:

$$b=2+2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow b=2-\frac{6}{4} \Rightarrow b=\frac{2\cdot 4-6}{4} \Rightarrow b=\frac{2}{4} \Rightarrow b=\frac{1}{2}.$$

Значит, функция имеет вид: $y(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

Правильный ответ: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

(4 балла)

Вопрос 8

Найдите значение выражения: $\frac{3\sin 120^\circ\cdot\cos 120^\circ}{\sin 240^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$3\sin 120° \cdot \cos 120° = 1{,}5 \cdot 2 \cdot \sin 120° \cdot \cos 120° = 1{,}5 \cdot \sin(2 \cdot 120°) = 1{,}5\sin 240°$.

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{3\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°} = \frac{1{,}5\sin 240°}{\sin 240°} = 1{,}5.$$

Правильный ответ: 1,5.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите уравнение: $x^2 - 14x + 40 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теоремы произведение корней равно свободному члену *c*, а сумма корней коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел = 40? Очевидно, что это числа 4 и 10. Сумма этих чисел равна 14, то есть коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. Получили: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 10.

Правильный ответ: 10.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x+2y=120, \\ -15x+y=-60. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен y.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы y.

$y=-60+15x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо y и найдем x

$10x+2(-60+15x)=120$

$10x-120+30x=120$

$40x=120+120$

$40x=240$

$x=6$

Третий шаг. Подставим найденное значение x в выражение для y, полученное на первом шаге, и найдем y.

$y=-60+15\cdot 6=-60+90=30$.

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен y. Получили $y = 30$.

Правильный ответ: 30.

(3 балла)

Вопрос 11

Решите неравенство $2x-2(3x-1)>2$

a) $x>4$

b) $x<1$

c) $x < 0$

d) $x > 2$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$2x - 2(3x - 1) = 2$

$2x - 6x + 2 = 2$

$-4x = 0$. Откуда $x = 0$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 0$. Одной из таких точек будет точка $x = -1$. Подставим $x = -1$ в исходное неравенство и проверим знак.

$2 \cdot (-1) - 2(3 \cdot (-1) - 1) > 2$

$-2 - 2 \cdot (-4) > 2$

$6 > 2$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 0$, то есть при $x < 0$.

Правильный ответ: $x < 0$.

(3 балла)

Вопрос 12

Найдите производную функции: $f(x) = x^6 + 5x^3 - 10x^2 + 100$. В ответ запишите значение производной в точке $x = 1$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также, что производная алгебраической

суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U+V\right)^{'}=U^{'}+V^{'}$.

Следовательно, производная функции *f*(*x*) равна:

$$f^{'}(x)=(x^6)^{'}+5(x^3)^{'}-10\left(x^2\right)^{'}+(100)'=$$

$$=6x^{6-1}+5\cdot 3x^{3-1}-10\cdot 2x^{2-1}+0=6x^5+15x^2-20x.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x=1$. Для этого подставим в полученную производную $x=1$:

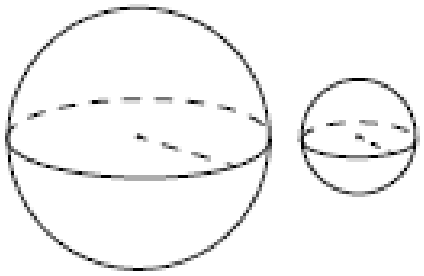
$$f^{'}(1)=6\cdot 1^5+15\cdot 1^2-20\cdot 1=6+15-20=1.$$

Правильный ответ: 1.

(4 балла)

Вопрос 13

Даны два шара радиусами 12 и 4. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S=4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2}=\frac{{R_2}^2}{{R_1}^2}=\frac{12^2}{4^2}=\frac{144}{16}=9.$$

Получили – площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 9 раз.

Правильный ответ: 9.

(9 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

$81 \cdot 3^{2(x^2+4)} = 3^{x^2-5x+6}$

Решение

Легко заметить, что число 81 можно представить следующим образом: $81 = 3^4$. С учётом этого факта перепишем уравнение в следующем виде:

$3^4 \cdot 3^{2\left(x^2+4\right)} = 3^{x^2-5x+6}$

Известно, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляем без изменений, а показатели степеней складываем. Соответственно выражение принимает вид:

$3^{4+2\left(x^2+4\right)} = 3^{x^2-5x+6}$

Чтобы найти неизвестное *x*, необходимо приравнять степени:

$4+2\left(x^2+4\right) = x^2-5x+6$

Перенесем все члены уравнения в левую часть:

$4+2x^2+8-x^2+5x-6=0$

и получим квадратное уравнение: $x^2+5x+6=0$.

Так как коэффициент при $x^2=1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теоремы: $x_1 \cdot x_2 = 6$, $x_1 + x_2 = -5$.

Получаем: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.

По условию задачи в ответ необходимо записать сумму корней:

–2 – 3= –5.

Правильный ответ: –5.

(9 баллов)

Вопрос 15

Найдите $8\cos(2\pi+\beta)+10\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta=\frac{2}{9}$.

Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решение

Для решения данной задачи воспользуемся тригонометрическими формулами:

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Запишем $\cos(2\pi+\beta)$ в соответствии с формулой косинуса суммы углов:

$\cos(2\pi+\beta)=\cos 2\pi\cdot\cos\beta-\sin 2\pi\cdot\sin\beta$.

Известно, что $\cos 2\pi=1,\sin 2\pi=0$.Также по условию задачи задано:

$\cos\beta=\frac{2}{9}$.

В соответствии с этим перепишем выражение:

$\cos(2\pi+\beta)=\cos 2\pi\cdot\cos\beta-\sin 2\pi\cdot\sin\beta=1\cdot\frac{2}{9}-0\cdot\sin\beta=\frac{2}{9}$.

Запишем $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$ в соответствии с формулой синуса суммы углов:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\beta+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\beta$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.Также по условию задачи задано:

$\cos\beta=\frac{2}{9}$.

В соответствии с этим перепишем выражение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=1\cdot\frac{2}{9}+0\cdot\sin\beta=\frac{2}{9}.$$

Подставим полученные значения в исходное выражение и получим окончательный ответ:

$$8\cos\left(2\pi+\beta\right)+10\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=8\cdot\frac{2}{9}+10\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{9}+\frac{20}{9}=\frac{36}{9}=4.$$

Правильный ответ: 4.

(8 баллов)

Вариант 3

(с решениями)

Вопрос 1

Какая процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока депозита?

a) Простая

b) Сложная

c) Постоянная

d) Переменная

Правильный ответ: Простая.

(6 баллов)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{1}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{2\cdot 2+1\cdot 7}{6}\right)\cdot 6=\frac{11}{6}\cdot 6=6.$$

Правильный ответ: 11.

(3 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(2\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-5\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения, необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$. В нашем случае: $a = 2\sqrt{15}$, $b = 5$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(2\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-5\right) = \left(2\sqrt{15}\right)^2 - 5^2 = 2^2\cdot 15 - 25 = 60 - 25 = 35.$$

Правильный ответ: 35.

(3 балла)

Вопрос 4

Множитель наращения, рассчитанный для срока 3 года, равен 1,6. Чему равна простая ссудная ставка?

a) 10% годовых.

b) 20% годовых.

c) 30% годовых.

d) 40% годовых.

Решение

Множитель наращения рассчитывается по формуле:

$$M_G = 1 + nr,$$

где n – срок; r – ставка.

Из этой формулы выведем ставку:

$$r = \frac{M_G - 1}{n}.$$

Получим:

$$\frac{(1,6-1)}{3} = 0,2 = 20\% \text{ годовых.}$$

Правильный ответ: 20% годовых.

(3 балла)

Вопрос 5

В условной экономике за последние 5 лет фиксировались следующие значения уровня безработицы:

Год	2020	2021	2022	2023	2024
Уровень безработицы, %	8	4	6	5	4

Вычислите темп роста показателя в 2023 г. Ответ дайте в процентах с точностью до одной цифры после десятичной запятой. Введите полученное число без указания единиц измерения.

Решение

Чтобы найти темп роста (убыли), необходимо последующий уровень разделить на предыдущий уровень и умножить на 100%.

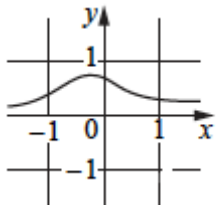
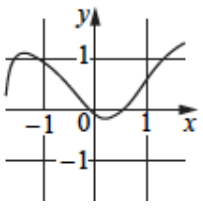
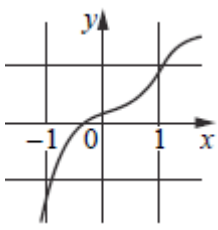
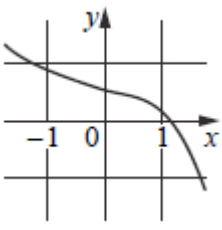
Рассчитаем показатель для 2023 г.: $\frac{5}{6}\cdot 100\ \% \approx 83{,}333\ \%$.

Правильный ответ: 83,3.

(6 баллов)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1) Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].

2) Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].

3) Функция убывает на отрезке [−1; 1].

4) Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

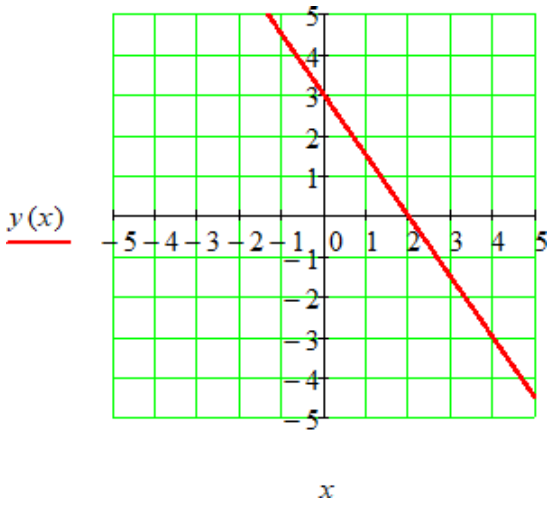
Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	4	3

(6 баллов)

Вопрос 7

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



a) $y=-1,5x+3$

b) $y=1,5x+3$

c) $y=1,5x-3$

d) $y=-1,5x-3$

Решение

Прямая имеет вид линейной функции $y(x)=kx+b$.

Из рисунка видно, что она проходит через точку с координатами $x_1=0$, $y_1=3$ и точку с координатами $x_2=2$, $y_2=0$.

Подставим последовательно значения $x_1=0$, $y_1=3$ и $x_2=2$, $y_2=0$ в функцию $y(x)=kx+b$. Получим:

1) $3=k\cdot 0+b$ или $b=3$ и 2) $0=k\cdot 2+b$ или $0=2k+b$.

Подставим $b=3$ во второе равенство и получим k:

$0 = 2k + 3 \Rightarrow 2k = -3 \Rightarrow k = -\frac{3}{2} \Rightarrow k = -1,5.$

Значит, функция имеет вид: $y(x) = -1,5x + 3$.

Правильный ответ: $y = -1,5x + 3$.

(4 балла)

Вопрос 8

Найдите значение выражения: $\frac{10\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$10\sin 120° \cdot \cos 120° = 5 \cdot 2 \cdot \sin 120° \cdot \cos 120° = 5 \cdot \sin(2 \cdot 120°) = 5\sin 240°$.

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{10\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°} = \frac{5\sin 240°}{\sin 240°} = 5.$$

Правильный ответ: 5.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите уравнение: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теоремы произве-

дение корней равно свободному члену *c*, а сумма корней коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел = 2? Очевидно, что это числа 1 и 2. Сумма этих чисел равна 3, то есть коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. Получили: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 2.

Правильный ответ: 2

(4 балла)

Вопрос 10

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -15x + y = -10. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы *y*.

$y = -10 + 15x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо *y* и найдем *x*

$10x + 2(-10 + 15x) = 12$

$10x - 20 + 30x = 12$

$40x = 12 + 20$

$40x = 32$

$x = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$$y = -10 + 15 \cdot \frac{4}{5} = -10 + 3 \cdot 4 = -10 + 12 = 2.$$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили *y* = 2.

Правильный ответ: 2.

(3 балла)

Вопрос 11

Решите неравенство $5x - 3(2x + 1) > 10$.

a) $x > 4$

b) $x < -13$

c) $x < 2$

d) $x > 2$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$5x - 3(2x + 1) = 10$

$5x - 6x - 3 = 10$

$-x = 13$. Откуда $x = -13$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки *x* = – 13. Одной из таких точек будет точка *x* = – 15. Подставим *x* = – 15 в исходное неравенство и проверим знак.

$5 \cdot (-15) - 3(2 \cdot (-15) + 1) > 10$

$-75 - 3 \cdot (-29) > 10$

$12 > 10$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки *x* = – 13, то есть при *x* < – 13.

Правильный ответ: $x < -13$.

(3 балла)

Вопрос 12

Найдите производную функции: $f(x)=x^5+2x^3-10x^2+10$. В ответ запишите значение производной в точке $x=2$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U+V\right)'=U'+V'$.

Следовательно, производная функции *f*(*x*) равна:

$$f'(x)=(x^5)'+2(x^3)'-10\left(x^2\right)'+(10)'=$$
$$=5x^{5-1}+2\cdot 3x^{3-1}-10\cdot 2x^{2-1}+0=5x^4+6x^2-20x.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x=2$. Для этого подставим в полученную производную: $x=2$.

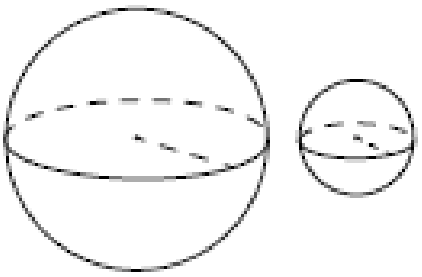
$$f'(2)=5\cdot 2^4+6\cdot 2^2-20\cdot 2=5\cdot 16+6\cdot 4-40=80+24-40=64.$$

Правильный ответ: 64.

(4 балла)

Вопрос 13

Даны два шара радиусами 12 и 2. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{12^2}{2^2} = \frac{144}{4} = 36.$$

Получили – площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 36 раз.

Правильный ответ: 36.

(9 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

$$8 \cdot 2^{x^2+8} = 2^{-6x+3}$$

Решение

Легко заметить, что число 8 можно представить следующим образом: $8 = 2^3$. С учётом этого факта перепишем уравнение в следующем виде:

$$2^3 \cdot 2^{x^2+8} = 2^{-6x+3}$$

Известно, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляем без изменений, а показатели степеней складываем. Соответственно выражение принимает вид:

$$2^{3+x^2+8} = 2^{-6x+3}$$

Чтобы найти неизвестное x, необходимо приравнять степени:

$$3 + x^2 + 8 = -6x + 3$$

Перенесем все члены уравнения в левую часть:

$3+x^2+8+6x-3=0$

и получим квадратное уравнение: $x^2+6x+8=0$.

Так как коэффициент при $x^2=1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теоремы: $x_1 \cdot x_2 = 8$, $x_1 + x_2 = -6$.

Получаем: $x_1 = -2$, $x_2 = -4$.

По условию задачи в ответ необходимо записать сумму корней:

–2 – 4 = –6.

Правильный ответ: –6

(9 баллов)

Вопрос 15

Найдите $10\cos(2\pi-\beta)+17\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, если $\cos\beta=\frac{2}{9}$.

Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решение

Для решения данной задачи воспользуемся тригонометрическими формулами:

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Запишем $\cos(2\pi-\beta)$ в соответствии с формулой косинуса разности углов:

$\cos(2\pi-\beta)=\cos 2\pi\cdot\cos\beta+\sin 2\pi\cdot\sin\beta$.

Известно, что $\cos 2\pi=1, \sin 2\pi=0$.Также по условию задачи задано:

$\cos\beta=\frac{2}{9}$.

В соответствии с этим перепишем выражение:

$$\cos(2\pi-\beta)=\cos 2\pi\cdot\cos\beta+\sin 2\pi\cdot\sin\beta=1\cdot\frac{2}{9}+0\cdot\sin\beta=\frac{2}{9}.$$

Запишем $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ в соответствии с формулой синуса разности углов:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\beta-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\beta.$$

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.Также по условию задачи задано:

$$\cos\beta=\frac{2}{9}.$$

В соответствии с этим перепишем выражение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=1\cdot\frac{2}{9}-0\cdot\sin\beta=\frac{2}{9}.$$

Подставим полученные значения в исходное выражение и получим окончательный ответ:

$$10\cos(2\pi-\beta)+17\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=10\cdot\frac{2}{9}+17\cdot\frac{2}{9}=\frac{20}{9}+\frac{34}{9}=\frac{54}{9}=6.$$

Правильный ответ: 6.

(8 баллов)

Вариант 4

(с решениями)

Вопрос 1

Какая процентная ставка применяется к наращенной сумме долга, т. е. к сумме, увеличенной на величину начисленных за предыдущий период процентов?

a) Простая

b) Сложная

c) Постоянная

d) Переменная

Правильный ответ: Сложная.

(6 баллов)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{1}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{1\cdot 2+1\cdot 7}{6}\right)\cdot 6=\frac{9}{6}\cdot 6=9.$$

Правильный ответ: 9

(3 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(2\sqrt{15}+6\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-6\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения, необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$. В нашем случае: $a = 2\sqrt{15}$, $b = 6$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(2\sqrt{15}+6\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-6\right) = \left(2\sqrt{15}\right)^2 - 6^2 = 2^2\cdot 15 - 36 = 60 - 36 = 24.$$

Правильный ответ: 24.

(3 балла)

Вопрос 4

Вы положили в банк 3000 долл. Банк начисляет простые ссудные проценты по ставке 12% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 5 лет? Ответ дайте в долларах США с точностью до цента. Введите полученное число без указания единиц измерения.

Решение

Для того чтобы вычислить сумму на счету через 5 лет, воспользуемся формулой:

$$\text{Исходная сумма}\cdot(1+nr),$$

где n – срок; r – ставка.

Подставим значения в формулу:

$3000\cdot(1+5\cdot 0{,}12) = 4800$ долл.

Правильный ответ: 4800.

(3 балла)

Вопрос 5

В условной экономике за последние 5 лет фиксировались следующие значения размера средней заработной платы населения:

Год	2020	2021	2022	2023	2024
Размер средней заработной платы населения, руб.	45 600	48 700	51 700	52 100	52 700

Вычислите темп роста показателя в 2024 г. по сравнению с 2022 г. Ответ дайте в процентах с точностью до одной цифры после десятичной запятой. Введите полученное число без указания единиц измерения.

Решение

Чтобы найти темп роста (убыли), необходимо последующий уровень разделить на предыдущий уровень и умножить на 100%.

Рассчитаем показатель для 2024 г. по сравнению с 2022 г.:

$$\frac{52700}{51700}\cdot 100\ \% \approx 101{,}934\ \%.$$

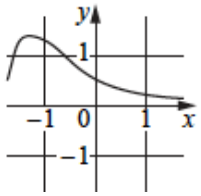
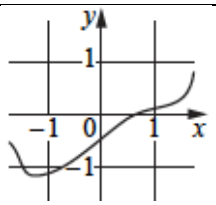
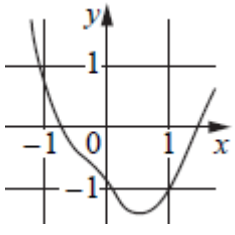
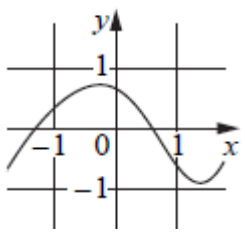
Полученное значение, округлённое с указанной точностью, равно 101,9%.

Правильный ответ: 101,9.

(6 баллов)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1) Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].

2) Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].

3) Функция убывает на отрезке [−1; 1].

4) Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

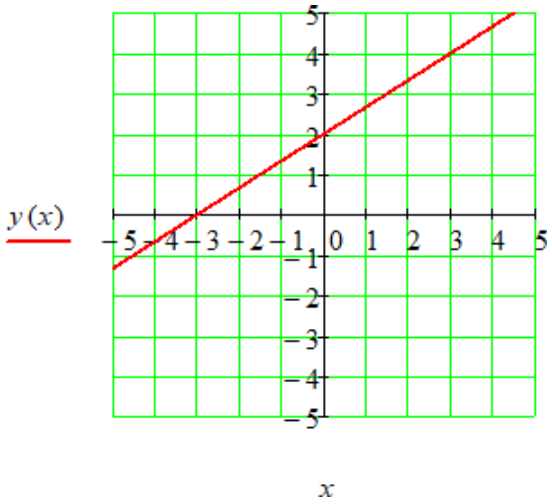
Правильный ответ:

А	Б	В	Г
3	4	2	1

(6 баллов)

Вопрос 7

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



a) $y=\frac{2}{3}x+2$

b) $y=-\frac{2}{3}x-2$

c) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

d) $y=\frac{2}{3}x-2$

Решение

Прямая имеет вид линейной функции $y(x)=kx+b$.

Из рисунка видно, что она проходит через точку с координатами $x_1=-3$, $y_1=0$ и точку с координатами $x_2=0$, $y_2=2$.

Подставим последовательно значения $x_1 = -3,\ y_1 = 0$ и $x_2 = 0,\ y_2 = 2$ в функцию $y(x) = kx + b$. Получим:

1) $0 = k \cdot (-3) + b$ или $0 = -3k + b$ и 2) $2 = k \cdot 0 + b$ или $b = 2$.

Подставим $b = 2$ в первое равенство и получим k:

$0 = -3k + 2 \Rightarrow 3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

Значит, функция имеет вид: $y(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

Правильный ответ: $y = \frac{2}{3}x + 2$.

(4 балла)

Вопрос 8

Найдите значение выражения: $\frac{12\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$12\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 6 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 6 \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) = 6\sin 240^\circ$.

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$\frac{12\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ} = \frac{6\sin 240^\circ}{\sin 240^\circ} = 6$.

Правильный ответ: 6.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите уравнение: $x^2+4x+3=0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2+bx+c=0$ коэффициент $a=1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теоремы произведение корней равно свободному члену *c*, а сумма корней коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел = 3? Очевидно, что это числа 1 и 3. Сумма этих чисел равна 4. По теореме Виета сумма корней должны быть равна коэффициенту *b*, взятому с противоположным знаком. Коэффициент *b* = 4. Сумма корней должна быть равна = – 4. Значит корни уравнения будут такими: x_1= –1, x_2= –3. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = –1.

Правильный ответ: –1.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x+2y=240, \\ -15x+y=-100. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы *y*.

$y=-100+15x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо *y* и найдем *x*.

$10x+2\left(-100+15x\right)=240$

$10x-200+30x=240$

$40x=240+200$

$40x=440$

$x=11$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$y=-100+15\cdot 11=-100+165=65.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили $y = 65$.

Правильный ответ: 65.

(3 балла)

Вопрос 11

Решите неравенство $3x+4\left(8x+10\right)<75.$

a) $x>4$

b) $x>2$

c) $x<1$

d) $x>1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$3x+4\left(8x+10\right)=75$

$3x+32x+40=75$

$35x=35$. Откуда $x=1.$

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 1$. Одной из таких точек будет точка $x = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство и проверим знак.

$$3 \cdot 0 + 4(8 \cdot 0 + 10) < 75$$

$$0 + 4(0 + 10) < 75$$

$$40 < 75$$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 1$, то есть при $x < 1$.

Правильный ответ: $x < 1$.

(3 балла)

Вопрос 12

Найдите производную функции: $f(x) = 10x^8 - 6x^6 + 5x^4 - 3x$. В ответ запишите значение производной в точке $x = 1$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = 10(x^8)' - 6(x^6)' + 5\left(x^4\right)' - 3(\mathrm{x})' = 10 \cdot 8x^{8-1} - 6 \cdot 6x^{6-1} + 5 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 1 =$$

$$= 80x^7 - 36x^5 + 20x^3 - 3.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 1$. Для этого подставим в полученную производную: $x = 1$.

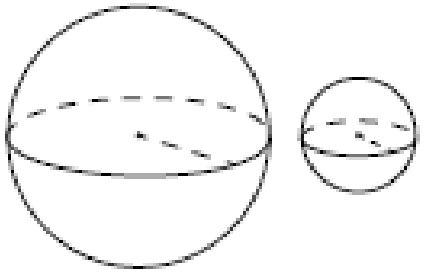
$$f'(1) = 80 \cdot 1^7 - 36 \cdot 1^5 + 20 \cdot 1^3 - 3 = 80 - 36 + 20 - 3 = 61.$$

Правильный ответ: 61.

(4 балла)

Вопрос 13

Даны два шара радиусами 16 и 4. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{16^2}{4^2} = \frac{256}{16} = 16.$$

Получили – площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 16 раз.

Правильный ответ: 16.

(9 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

$64 \cdot 4^{2x^2+4} = 4^{x^2-2x+15}$

Решение

Легко заметить, что число 64 можно представить следующим образом: $64 = 4^3$. С учётом этого факта перепишем уравнение в следующем виде:

$4^3 \cdot 4^{2x^2+4} = 4^{x^2-2x+15}$

Известно, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляем без изменений, а показатели степеней складываем. Соответственно выражение принимает вид:

$4^{3+2x^2+4} = 4^{x^2-2x+15}$

Чтобы найти неизвестное *x*, необходимо приравнять степени:

$3+2x^2+4 = x^2-2x+15$

Перенесем все члены уравнения в левую часть:

$3+2x^2+4-x^2+2x-15 = 0$

и получим квадратное уравнение: $x^2+2x-8=0$.

Так как коэффициент при $x^2 = 1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теоремы: $x_1 \cdot x_2 = -8$, $x_1 + x_2 = -2$.

Получаем: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.

По условию задачи в ответ необходимо записать сумму корней:

2 – 4 = –2.

Правильный ответ: –2.

(9 баллов)

Вопрос 15

Найдите $6\cos(\pi-\beta)+18\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, если $\cos\beta = \frac{1}{3}$.

Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решение

Для решения данной задачи воспользуемся тригонометрическими формулами:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Запишем $\cos(\pi-\beta)$ в соответствии с формулой косинуса разности углов:

$$\cos(\pi-\beta)=\cos\pi\cdot\cos\beta+\sin\pi\cdot\sin\beta.$$

Известно, что $\cos\pi=-1,\sin\pi=0$. Также по условию задачи задано:

$$\cos\beta=\frac{1}{3}.$$

В соответствии с этим перепишем выражение:

$$\cos(\pi-\beta)=\cos\pi\cdot\cos\beta+\sin\pi\cdot\sin\beta=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\sin\beta=-\frac{1}{3}.$$

Запишем $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ в соответствии с формулой синуса разности углов:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\beta-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\beta.$$

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Также по условию задачи задано:

$$\cos\beta=\frac{1}{3}.$$

В соответствии с этим перепишем выражение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=1\cdot\frac{1}{3}-0\cdot\sin\beta=\frac{1}{3}.$$

Подставим полученные значения в исходное выражение и получим окончательный ответ:

$$6\cos(\pi-\beta)+18\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+18\cdot\frac{1}{3}=-2+6=4.$$

Правильный ответ: 4.

(8 баллов)