Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

Математика

Открытый билет

Вариант 1

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 180 и 150.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

Число	Делители
150	2
75	5
15	5
3	3
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$180 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$

$150 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$180 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{3} \cdot 3$

$150 = \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot 5 \cdot \underline{3}$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ – наибольший общий делитель чисел 180 и 150.

Правильный ответ: 30.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) \div \frac{1}{18}$.

a) 6

b) 9

c) $\frac{1}{36}$

d) 18

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{18}$ заменим умножением на число 18. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{1\cdot 2+1\cdot 1}{6}\right)\cdot 18=\frac{3}{6}\cdot 18=\frac{1}{2}\cdot 18=9.$$

Правильный ответ: 9.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)$.

a) 13

b) 19

c) 11

d) $4\sqrt{3}$

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае $a=4$, $b=\sqrt{3}$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)=4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=16-3=13.$$

Правильный ответ: 13.

(3 балла)

Вопрос 4

В городских спортивных соревнованиях приняли участие 12 десятиклассников, что составляет треть от общего числа десятиклассников. Сколько десятиклассников не приняли участия в соревнованиях?

a) 4

b) 36

c) 24

d) 12

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг. Определим общее число десятиклассников. Для этого составим пропорцию, зная, что 12 человек – это одна треть от общего числа. Обозначим общее число десятиклассников x.

12 человек – $\frac{1}{3}$,

x человек – 1.

Получим уравнение, из которого найдем неизвестное x: $\frac{1}{3}x = 12$. Откуда $x = 12 \cdot 3 = 36$. Получили, что общее число десятиклассников – 36 человек.

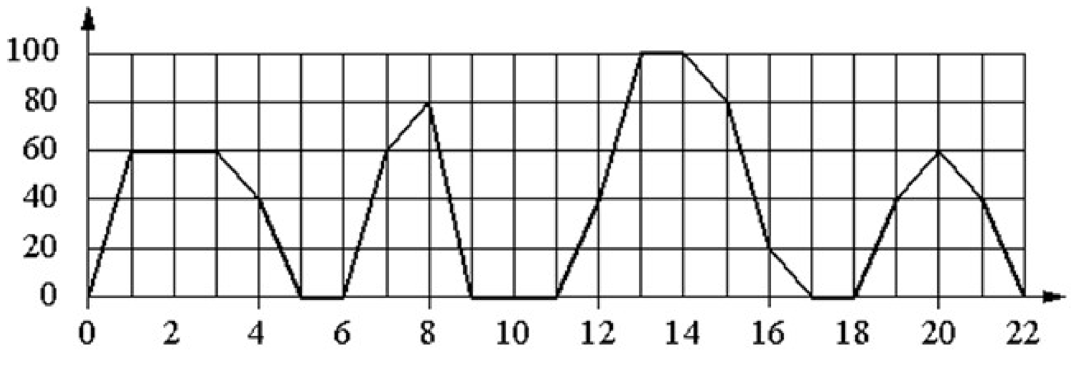
Второй шаг. Определим количество десятиклассников, не принявших участие в олимпиаде. Известно, что всего десятиклассников 36, приняли участие в олимпиаде – 12. Следовательно, количество десятиклассников, не принявших участие в олимпиаде, определяется таким образом: 36 – 12 = 24.

Правильный ответ: 24.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 12–16 мин.

1. Была остановка длительностью 2 мин.

2. Скорость не меньше 20 км/ч на всем интервале.

3. Скорость не больше 60 км/ч.

4. Была остановка длительностью ровно 1 мин.

Решение

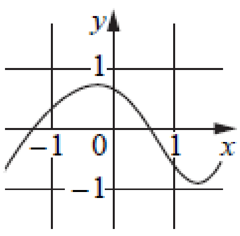
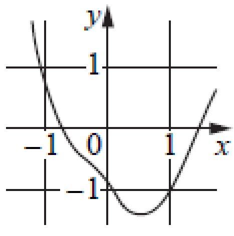
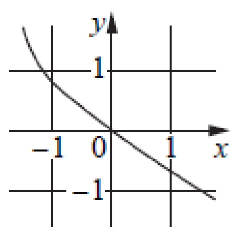
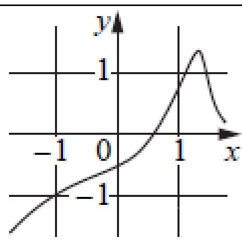
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 12–16 мин. Варианты 1, 4 неверные, так как на всем интервале 12–16 мин нет участков, на которых скорость была бы равна нулю. Вариант 3 тоже неверный, так как максимальная скорость на интервале 12–16 мин составляет 100 км/ч. Проверим вариант 2. По графику видим, что минимальная скорость на интервале 12–16 составляет 20 км/ч (в момент времени = 16 мин). В остальные интервалы времени скорость выше 20 км/ч. Следовательно, можно сделать вывод о том, что на всем интервале 12–16 скорость автобуса не меньше 20 км/ч.

Правильный ответ: 2.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].

2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].

3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].

4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, где значение функции больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, где значение функции меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	3	4

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{30\sin 79^\circ \cdot \cos 79^\circ}{\sin 158^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$30\sin 79^\circ \cdot \cos 79^\circ = 15 \cdot 2 \cdot \sin 79^\circ \cdot \cos 79^\circ = 15 \cdot \sin(2 \cdot 79^\circ) = 15\sin 158^\circ$.

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{30\sin 79^\circ \cdot \cos 79^\circ}{\sin 158^\circ} = \frac{15\sin 158^\circ}{\sin 158^\circ} = 15.$$

Правильный ответ: 15.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 - 17x + 72 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

a) 8

b) 9

c) –8

d) –9

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно 72? Очевидно, что это числа 8 и 9. Сумма этих чисел равна 17, то есть коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Получили: $x_1 = 8$, $x_2 = 9$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 9.

Правильный ответ: 9.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 120, \\ -15x + 2y = -60. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен y.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из первого уравнения системы $2y$. Выражаем $2y$, потому что во втором уравнении также встречается $2y$.

$$2y = 120 - 10x$$

Второй шаг. Подставим полученное выражение во второе уравнение и найдем x.

$$-15x + (120 - 10x) = -60$$

$$-15x + 120 - 10x = -60$$

$$-25x = -60 - 120$$

$$-25x = -180$$

$$x = 7.2$$

Третий шаг. Подставим найденное значение x в выражение для y, полученное на первом шаге, и найдем y.

$2y = 120 - 10 \cdot 7.2$

$2y = 120 - 72$

$2y = 48$

$y = 24$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен y. Получили $y = 24$.

Правильный ответ: 24.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $2x - 2(3x - 1) > 6$.

$x > -1$

$x > 1$

$x \leq -1$

$x < -1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$2x - 2(3x - 1) = 6$

$2x - 6x + 2 = 6$

$-4x = 4$. Откуда $x = -1$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = -1$. Одной из таких точек будет точка $x = -2$. Подставим $x = -2$ в исходное неравенство и проверим знак.

$2 \cdot (-2) - 2(3 \cdot (-2) - 1) > 6$

$-4 - 2 \cdot (-7) > 6$

$10 > 6$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = -1$, то есть при $x < -1$.

Правильный ответ: $x < -1$.

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x) = x^5 + 2x^2 + 50$. В ответ запишите значение производной в точке $x = 2$.

a) 88

b) 102

c) 50

d) 80

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = \left(x^5\right)' + 2\left(x^2\right)' + (50)' = 5x^{5-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 5x^4 + 4x.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 2$. Для этого подставим в полученную производную $x = 2$:

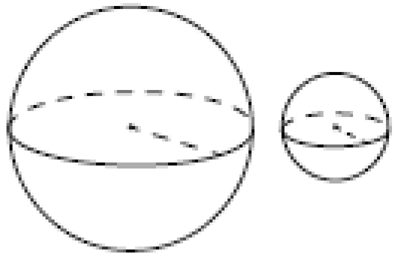
$$f'(2) = 5 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2 = 5 \cdot 16 + 8 = 88.$$

Правильный ответ: 88.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 6 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



a) 9

b) 4

c) 3

d) 2

Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус как S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{6^2}{3^2} = \frac{36}{9} = 4.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 4 раза.

Правильный ответ: 4.

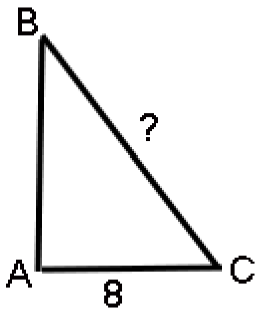
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\text{tg}B = \sqrt{3}$, $AC = 8$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\text{tg}B = \sqrt{3}$, значит, угол $B = \text{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а катет $AC = 8$ по условию задачи. Получаем: $8 = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = \frac{16}{\sqrt{3}} \approx 9.24$.

Правильный ответ: 9.24.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

$\sqrt{3x-11}=x-3$

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение.

$\left(\sqrt{3x-11}\right)^2=\left(x-3\right)^2$

$3x-11=x^2-2\cdot 3x+3^2$

$3x-11=x^2-6x+9$

$x^2-6x+9=3x-11$

$x^2-6x+9-3x+11=0$

$x^2-9x+20=0$

Так как коэффициент при $x^2=1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теореме, $x_1\cdot x_2=20$, $x_1+x_2=9$.

Получаем: $x_1=4$, $x_2=5$.

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{3x-11}\geq 0$. Следовательно, $3x-11\geq 0$. Откуда следует, что $x\geq\frac{11}{3}$ или $x\geq 3,667$. Так как корень неотрицателен, то выражение $x-3\geq 0\Rightarrow x\geq 3$. Объединяя $x\geq 3,667$ и $x\geq 3$ получаем: $x\geq 3,667$. Сравним полученные корни с выражением $x\geq 3,667$: $4>3,667$ – выполняется, $5>3,667$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $x_1=4$, $x_2=5$. По условию задачи, в ответ нужно записать их сумму: 4 + 5 = 9.

Правильный ответ: 9.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=2t^3-12t^2+$ $+14t-10,$ где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость, а первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$ Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U+V\right)'=U'+V'.$

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$$v(t)=x'(t)=2\cdot 3t^{3-1}-12\cdot 2t^{2-1}+14\cdot 1=6t^2-24t+14.$$

Вычислим вторую производную:

$$a(t)=x''(t)=\left(6t^2-24t+14\right)'=6\cdot 2t^{2-1}-24\cdot 1=12t-24.$$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет равно 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t. $a(t)=12t-24=0.$ Откуда получаем: $t=2.$

Правильный ответ: 2.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

a) $a\in[2;4)$

b) $a\in(2;4)$

c) $a\in[2;4]$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a>\frac{11}{9}$

g) $a\in[3;3.75]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a\neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант:

$$D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0$$

$$(a-2)(a-4)<0$$

Решение данного неравенства: $a \in (2;4)$.

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a \in [2;4)$.

Правильный ответ: $a \in [2;4)$.

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \frac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a < \frac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\frac{2}{3};0\right]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0$.

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2$.

Выразим из обоих уравнений *x* и приравняем:

$x = t^2 + 1 - 2a$

$x = z^2 + a$

$t^2 + 1 - 2a = z^2 + a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t+z=1$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t+z=1, \\ t^2+1-3a=z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение, такое, что $t \ge 0,\ \ z \ge 0$.

Из первого уравнения найдем z: $t=1-z \Rightarrow 1-z \ge 0 \Rightarrow z \le 1$. Аналогично $t \le 1$.

Второе уравнение:

$t^2-z^2=3a-1$

$(t-z)(t+z)=3a-1$

Получим систему: $\begin{cases} t+z=1, \\ (t-z)(t+z)=3a-1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t=\dfrac{3}{2}a, \\ z=\dfrac{2-3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0 \le t \le 1,\ \ 0 \le z \le 1$.

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \le 3a \le 2, \\ 0 \le \dfrac{2-3a}{2} \le 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$.

При этом $0 \le t \le 1,\ \ 0 \le z \le 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$.

(13 баллов)

Вариант 2

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 225 и 400.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Число	Делители
400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$225 = 3 \cdot 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

$5 \cdot 5 = 25$ – наибольший общий делитель чисел 225 и 400.

Правильный ответ: 25.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\div\frac{1}{2}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{2}$ заменим умножением на число 2. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{2\cdot 2+1\cdot 5}{6}\right)\cdot 2=\frac{9}{6}\cdot 2=\frac{3}{2}\cdot 2=3.$$

Правильный ответ: 3.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(3\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(3\sqrt{15}-5\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае $a=3\sqrt{15},\ b=5$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(3\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(3\sqrt{15}-5\right)=\left(3\sqrt{15}\right)^2-5^2=3^2\cdot 15-25=135-25=110.$$

Правильный ответ: 110.

(3 балла)

Вопрос 4

Пицца стоит 710 руб. Студентам пиццерия делает скидку 5%. Сколько рублей стоит пицца для студента?

Решение

Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость пиццы:

$710 \cdot 0{,}05 = 35{,}50$ руб.

Следовательно, для студента пицца стоит:

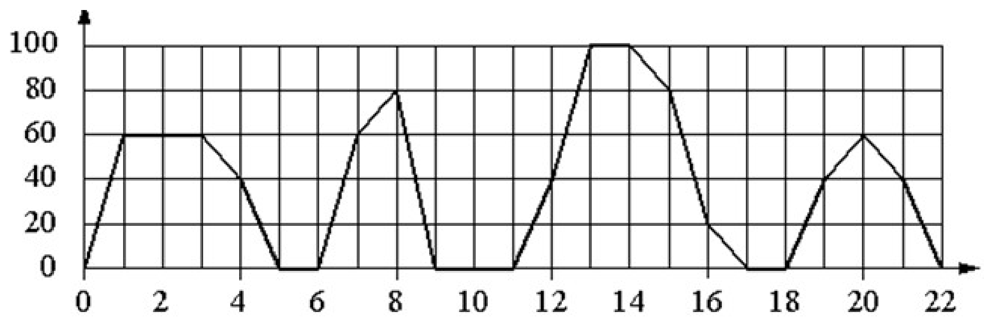
$710 - 35{,}50 = 674{,}50$ руб.

Правильный ответ: 674,50.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 9–11 мин.

1. Была остановка длительностью 2 мин.

2. Скорость не меньше 20 км/ч на всем интервале.

3. Скорость не больше 60 км/ч.

4. Была остановка длительностью 1 мин.

Решение

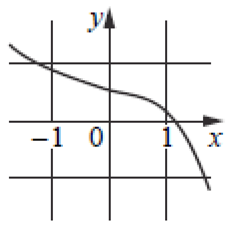
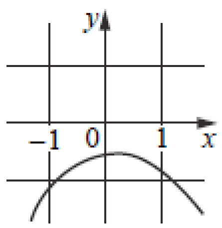
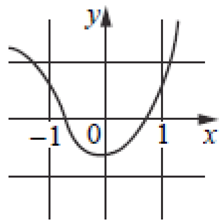
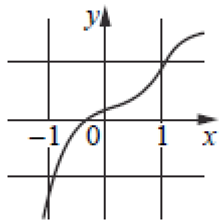
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 9–11 мин. Из графика видно, что на всем данном интервале скорость равна нулю. Следовательно, у автобуса на интервале 9–11 мин была остановка длительностью 2 мин.

Правильный ответ: 1.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, где значение функции больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, где значение функции меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
3	1	2	4

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{3\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$$3\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 1{,}5 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 1{,}5 \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) = 1{,}5\sin 240^\circ.$$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{3\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ} = \frac{1{,}5\sin 240^\circ}{\sin 240^\circ} = 1{,}5.$$

Правильный ответ: 1,5.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 - 14x + 40 = 0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1,$ то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c,\ \ x_1 + x_2 = -b.$ Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно 40? Очевидно, что это числа 4 и 10. Сумма этих чисел равна 14, то есть коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Получили: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 10.

Правильный ответ: 10.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 120, \\ -15x + y = -60. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен y.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы y.

$y = -60 + 15x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо y и найдем x.

$10x + 2(-60 + 15x) = 120$

$10x - 120 + 30x = 120$

$40x = 120 + 120$

$40x = 240$

$x = 6$

Третий шаг. Подставим найденное значение x в выражение для y, полученное на первом шаге, и найдем y.

$y = -60 + 15 \cdot 6 = -60 + 90 = 30.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен y. Получили $y = 30$.

Правильный ответ: 30.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $2x - 2(3x - 1) > 2$.

a) $x > 4$

b) $x < 1$

c) $x < 0$

d) $x > 2$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$2x - 2(3x - 1) = 2$

$2x - 6x + 2 = 2$

$-4x = 0$. Откуда $x = 0.$

Данный корень является точкой смены знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 0$. Одной из таких точек будет точка $x = -1$. Подставим $x = -1$ в исходное неравенство и проверим знак.

$2 \cdot (-1) - 2\big(3 \cdot (-1) - 1\big) > 2$

$-2 - 2 \cdot \big(-4\big) > 2$

$6 > 2$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 0$, то есть при $x < 0$.

Правильный ответ: $x < 0.$

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x) = x^6 + 5x^3 - 10x^2 + 100$. В ответ запишите значение производной в точке $x = 1$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а также что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = \left(x^6\right)' + 5\left(x^3\right)' - 10\left(x^2\right)' + (100)' = 6x^{6-1} + 5 \cdot 3x^{3-1} - 10 \cdot 2x^{2-1} + 0 =$$
$$= 6x^5 + 15x^2 - 20x.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 1$. Для этого подставим в полученную производную $x = 1$:

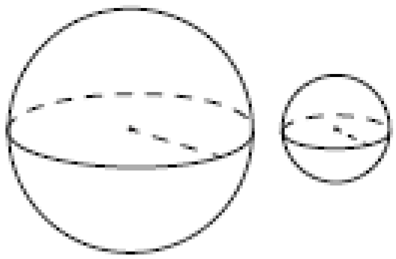
$$f'(1) = 6 \cdot 1^5 + 15 \cdot 1^2 - 20 \cdot 1 = 6 + 15 - 20 = 1.$$

Правильный ответ: 1.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 12 и 4. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус как S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{12^2}{4^2} = \frac{144}{16} = 9.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 9 раз.

Правильный ответ: 9.

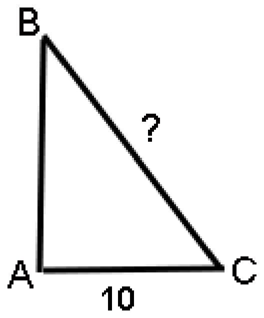
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\mathrm{ctg}B = \sqrt{3}$, $AC = 10$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\mathrm{ctg}B = \sqrt{3}$, значит, угол $B = \mathrm{arcctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, а катет $AC = 10$ по условию задачи. Получаем: $10 = BC \cdot \frac{1}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = 20$.

Правильный ответ: 20.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{5x+19}=x+5$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение.

$$\left(\sqrt{5x+19}\right)^2=\left(x+5\right)^2$$

$$5x+19=x^2+2\cdot 5x+5^2$$

$$5x+19=x^2+10x+25$$

$$x^2+10x+25=5x+19$$

$$x^2+10x+25-5x-19=0$$

$$x^2+5x+6=0$$

Так как коэффициент при $x^2=1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теореме, $x_1\cdot x_2=6$, $x_1+x_2=-5$.

Получаем: $x_1=-2$, $x_2=-3$.

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{5x+19}\geq 0$. Следовательно, $5x+19\geq 0$. Откуда следует, что $x\geq -\frac{19}{5}$ или $x\geq -3{,}8$. Так как корень неотрицателен, то выражение $x+5\geq 0\Rightarrow x\geq -5$. Объединяя $x\geq -3{,}8$ и $x\geq -5$ получаем: $x\geq -3{,}8$. Сравним полученные корни с выражением $x\geq -3{,}8$: $-2>-3{,}8$ – выполняется, $-3>-3{,}8$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $x_1=-2$, $x_2=-3$. По условию задачи, в ответ нужно записать их сумму: –3 + (– 2) = –5.

Правильный ответ: –5.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 21t^2 - 3t + 2$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость, а первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 3t^{3-1} - 21 \cdot 2t^{2-1} - 3t^{1-1} = 6t^2 - 42t - 3.$

Вычислим вторую производную:

$a(t) = x''(t) = \left(6t^2 - 42t - 3\right)' = 6 \cdot 2t^{2-1} - 42 \cdot t^{1-1} = 12t - 42.$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет равно 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t. $a(t) = 12t - 42 = 0$. Откуда получаем: $t = 3.5$.

Правильный ответ: 3.5.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

a) $a\in[2;4)$

b) $a\in(2;4)$

c) $a\in[2;4]$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a>\dfrac{11}{9}$

g) $a\in[3;3.75]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Мы имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a\neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант:

$$D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0$$

$$(a-2)(a-4)<0$$

Решение данного неравенства: $a \in (2;4)$.

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a \in [2;4)$.

Правильный ответ: $a \in [2;4)$.

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \frac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a<\frac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\frac{2}{3};0\right]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0$.

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2$.

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x=t^2+1-2a$

$x=z^2+a$

$t^2+1-2a=z^2+a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t+z=1$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t+z=1, \\ t^2+1-3a=z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение, такое, что $t \geq 0,\ z \geq 0$.

Из первого уравнения найдем z: $t=1-z \Rightarrow 1-z \geq 0 \Rightarrow z \leq 1$. Аналогично $t \leq 1$.

Второе уравнение:

$t^2-z^2=3a-1$

$(t-z)(t+z)=3a-1$

Получим систему: $\begin{cases} t+z=1, \\ (t-z)(t+z)=3a-1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t=\dfrac{3}{2}a, \\ z=\dfrac{2-3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \leq 3a \leq 2, \\ 0 \leq \dfrac{2-3a}{2} \leq 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \leq a \leq \dfrac{2}{3}$.

При этом $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \leq a \leq \dfrac{2}{3}$.

(13 баллов)

Вариант 3

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 84 и 128.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Число	Делители
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

$128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$84 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot 7$

$128 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

$2 \cdot 2 = 4$ – наибольший общий делитель чисел 84 и 128.

Правильный ответ: 4.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{1}{6}.$

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{2\cdot 2+1\cdot 7}{6}\right)\cdot 6=\frac{11}{6}\cdot 6=6.$$

Правильный ответ: 11.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(2\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-5\right).$

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right).$ В нашем случае $a=2\sqrt{15},\ b=5.$ Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(2\sqrt{15}+5\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-5\right)=\left(2\sqrt{15}\right)^2-5^2=2^2\cdot 15-25=60-25=35.$$

Правильный ответ: 35.

(3 балла)

Вопрос 4

Пицца стоит 690 руб. Пенсионерам пиццерия делает скидку 10%. Сколько рублей стоит пицца для пенсионера?

Решение

Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость пиццы:

$690 \cdot 0{,}10 = 69$ руб.

Следовательно, для пенсионера пицца стоит:

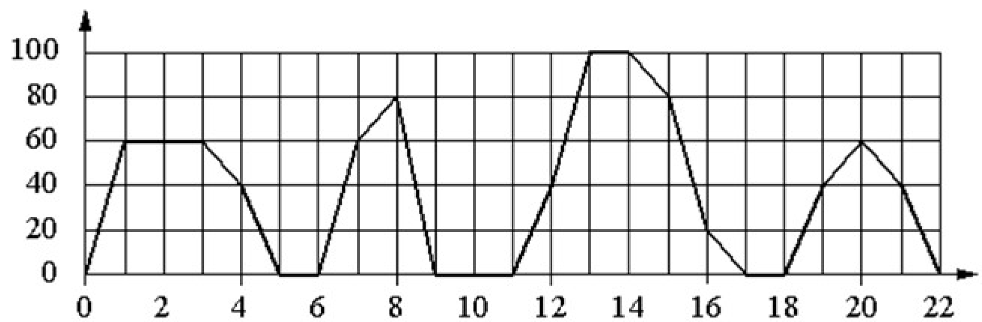
$690 - 69 = 621$ руб.

Правильный ответ: 621.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 1–3 мин.

1. Была остановка длительностью 2 мин.

2. Скорость не больше 20 км/ч на всем интервале

3. Скорость составляла 60 км/ч на всем интервале

4. Была остановка длительностью 1 мин.

Решение

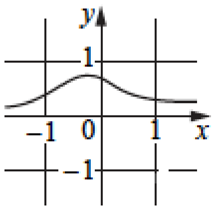
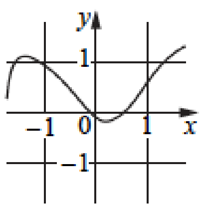
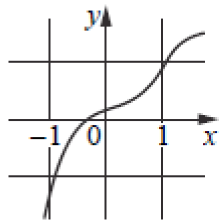
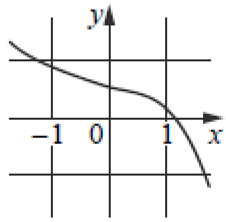
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 1–3 мин. Варианты 1 и 4 неверные, так как на всем интервале 1–3 мин нет участков, на которых скорость была бы равна нулю. Вариант 2 тоже неверный, так как максимальная скорость на интервале 1–3 составляет 60 км/ч. Этот факт соответствует варианту 3 – скорость составляла 60 км/ч на всем интервале.

Правильный ответ: 3.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, где значение функции в больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, где значение функции меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	4	3

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{10\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$$10\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 5 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 5 \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) = 5\sin 240^\circ.$$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{10\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ} = \frac{5\sin 240^\circ}{\sin 240^\circ} = 5.$$

Правильный ответ: 5.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 - 3x + 2 = 0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1,$ то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c,$ $x_1 + x_2 = -b.$ Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно 2? Очевидно, что это числа 1 и 2. Сумма этих чисел равна 3, то есть коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Получили: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 2.

Правильный ответ: 2.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -15x + y = -10. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен y.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы y.

$y = -10 + 15x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо y и найдем x.

$10x + 2(-10 + 15x) = 12$

$10x - 20 + 30x = 12$

$40x = 12 + 20$

$40x = 32$

$x = \dfrac{32}{40} = \dfrac{4}{5}$

Третий шаг. Подставим найденное значение x в выражение для y, полученное на первом шаге, и найдем y.

$y = -10 + 15 \cdot \dfrac{4}{5} = -10 + 3 \cdot 4 = -10 + 12 = 2.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен y. Получили $y = 2$.

Правильный ответ: 2.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $5x-3(2x+1)>10$.

a) $x>4$

b) $x<-13$

c) $x<2$

d) $x>2$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$5x-3(2x+1)=10$

$5x-6x-3=10$

$-x=13$. Откуда $x=-13$.

Данный корень является точкой смены знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = -13$. Одной из таких точек будет точка $x = -15$. Подставим $x = -15$ в исходное неравенство и проверим знак.

$5\cdot(-15)-3(2\cdot(-15)+1)>10$

$-75-3\cdot(-29)>10$

$12>10$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = -13$, то есть при $x < -13$.

Правильный ответ: $x<-13$.

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x) = x^5 + 2x^3 - 10x^2 + 10$. В ответ запишите значение производной в точке $x = 2$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = \left(x^5\right)' + 2\left(x^3\right)' - 10\left(x^2\right)' + (10)' = 5x^{5-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} - 10 \cdot 2x^{2-1} + 0 =$$
$$= 5x^4 + 6x^2 - 20x.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 2$. Для этого подставим в полученную производную $x = 2$:

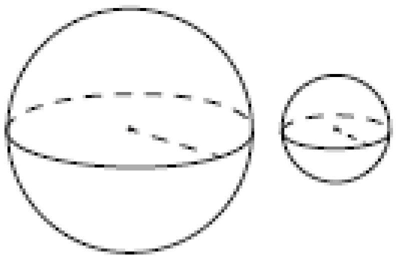
$$f'(2) = 5 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 = 5 \cdot 16 + 6 \cdot 4 - 40 = 80 + 24 - 40 = 64.$$

Правильный ответ: 64.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 12 и 2. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус как S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^{\ 2}}{4\pi R_1^{\ 2}} = \frac{R_2^{\ 2}}{R_1^{\ 2}} = \frac{12^2}{2^2} = \frac{144}{4} = 36.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 36 раз.

Правильный ответ: 36.

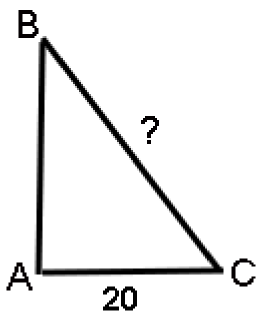
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\text{tg}B = \sqrt{3}$, $AC = 20$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\mathrm{ctg} B = \sqrt{3}$, значит, угол $B = \mathrm{arcctg}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$, а катет $AC = 20$ по условию задачи. Получаем: $20 = BC \cdot \dfrac{1}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = 40$.

Правильный ответ: 40.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{10x - 4} = x + 2$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение.

$$\left(\sqrt{10x-4}\right)^2 = (x+2)^2$$

$$10x - 4 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2$$

$$10x - 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 10x - 4$$

$$x^2 + 4x + 4 - 10x + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Так как коэффициент при $x^2 = 1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теореме, $x_1 \cdot x_2 = 8$, $x_1 + x_2 = 6$.

Получаем: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{10x-4} \geq 0$. Следовательно, $10x-4 \geq 0$. Откуда следует, что $x \geq \frac{4}{10}$ или $x \geq 0,4$ Так как корень неотрицателен, то выражение $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ Объединяя $x \geq 0,4$ и $x \geq -2$ получаем: $x \geq 0,4$. Сравним полученные корни с выражением $x \geq 0,4$: $2 > 0,4$ – выполняется, $4 > 0,4$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. По условию задачи, в ответ нужно записать их сумму: 2 + 4 = 6.

Правильный ответ: 6.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 11$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость, а первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U+V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$v(t) = x'(t) = 3 \cdot t^{3-1} - 3 \cdot 2t^{2-1} - 9 \cdot t^{1-1} + 0 = 3t^2 - 6t - 9.$

Вычислим вторую производную:

$a(t) = x''(t) = \left(3t^2 - 6t - 9\right)' = 3 \cdot 2t^{2-1} - 6 \cdot 1 - 0 = 6t - 6.$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет равно 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t. $a(t) = 6t - 6 = 0$. Откуда получаем: $t = 1$.

Правильный ответ: 1.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $\left(a-2\right)x^2 + 2\left(a-2\right)x + 2 = 0$ не имеет действительных корней.

a) $a \in [2;4)$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4]$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a > \frac{11}{9}$

g) $a \in [3;3.75]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a \neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант:

$$D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0$$

$$(a-2)(a-4)<0$$

Решение данного неравенства: $a \in (2;4).$

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a \in [2;4).$

Правильный ответ: $a \in [2;4).$

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a<\dfrac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\dfrac{2}{3};0\right]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t\ge 0$ и $z\ge 0.$

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2.$

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x=t^2+1-2a$

$x=z^2+a$

$t^2+1-2a=z^2+a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t+z=1.$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t+z=1, \\ t^2+1-3a=z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение, такое, что $t\ge 0,\ z\ge 0.$

Из первого уравнения найдем z: $t=1-z \Rightarrow 1-z\ge 0 \Rightarrow z\le 1.$ Аналогично $t\le 1.$

Второе уравнение:

$t^2-z^2=3a-1$

$(t-z)(t+z)=3a-1$

Получим систему: $\begin{cases} t+z=1, \\ (t-z)(t+z)=3a-1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t=\dfrac{3}{2}a, \\ z=\dfrac{2-3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0\le t\le 1,\ 0\le z\le 1.$

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0\le 3a\le 2, \\ 0\le \dfrac{2-3a}{2}\le 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0\le a\le \dfrac{2}{3}.$

При этом $0\le t\le 1,\ 0\le z\le 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0\le a\le \dfrac{2}{3}.$

(13 баллов)

Вариант 4

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 216 и 18.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Число	Делители
18	2
9	3
3	3
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$216 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3$

$18 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ – наибольший общий делитель чисел 216 и 18.

Правильный ответ: 18.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{1}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{1\cdot 2+1\cdot 7}{6}\right)\cdot 6=\frac{9}{6}\cdot 6=9.$$

Правильный ответ: 9.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(2\sqrt{15}+6\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-6\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае $a=2\sqrt{15},\ b=6$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(2\sqrt{15}+6\right)\cdot\left(2\sqrt{15}-6\right)=\left(2\sqrt{15}\right)^2-6^2=2^2\cdot 15-36=60-36=24.$$

Правильный ответ: 24.

(3 балла)

Вопрос 4

Пицца стоит 640 руб. Именинникам пиццерия делает скидку 10%. Сколько рублей стоит пицца для именинника?

Решение

Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость пиццы:

$640 \cdot 0{,}10 = 64$ руб.

Следовательно, для именинника пицца стоит:

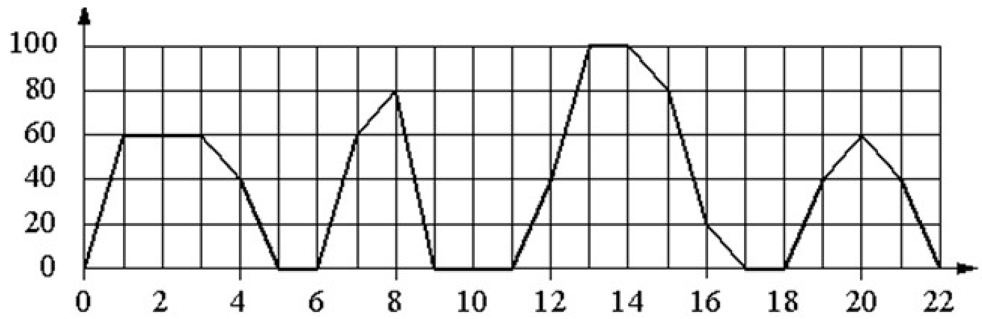
$640 – 64 = 576$ руб.

Правильный ответ: 576.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 13–14 мин.

1. Скорость составляла 100 км/ч на всем интервале.

2. Скорость не меньше 20 км/ч на всем интервале.

3. Скорость не больше 60 км/ч.

4. Была остановка длительностью ровно 1 мин.

Решение

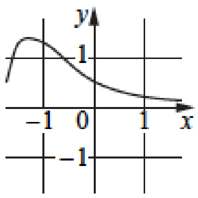
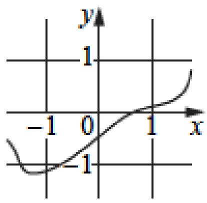
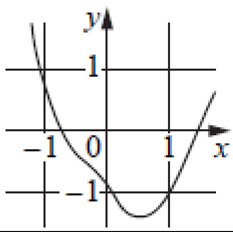
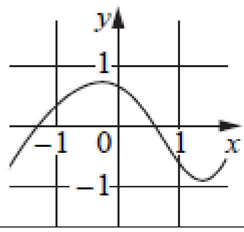
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 13–14 мин. Из графика видно, что на всем данном интервале скорость равна 100 км/ч. Данный факт соответствует варианту 1 – скорость автобуса составляла 100 км/ч на всем интервале.

Правильный ответ: 1.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, где значение функции больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, где значение функции меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике она выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
3	4	2	1

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{12\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$12\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 6 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = 6 \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) = 6\sin 240^\circ.$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{12\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ} = \frac{6\sin 240^\circ}{\sin 240^\circ} = 6.$$

Правильный ответ: 6.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c$, $x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно 3? Очевидно, что это числа 1 и 3. Сумма этих чисел равна 4. По теореме Виета, сумма корней должны быть равна коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Коэффициент b = 4. Сумма корней должна быть равна –4. Значит, корни уравнения будут такими: $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = –1.

Правильный ответ: –1.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 240, \\ -15x + y = -100. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен y.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы y.

$y = -100 + 15x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо y и найдем x.

$10x + 2(-100 + 15x) = 240$

$10x - 200 + 30x = 240$

$40x = 240 + 200$

$40x = 440$

$x = 11$

Третий шаг. Подставим найденное значение x в выражение для y, полученное на первом шаге, и найдем y.

$y = -100 + 15 \cdot 11 = -100 + 165 = 65.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен y. Получили $y = 65$.

Правильный ответ: 65.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $3x + 4(8x + 10) < 75.$

a) $x > 4$

b) $x > 2$

c) $x < 1$

d) $x > 1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$3x + 4(8x + 10) = 75$

$3x + 32x + 40 = 75$

$35x = 35$. Откуда $x = 1$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 1$. Одной из таких точек будет точка $x = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство и проверим знак.

$3 \cdot 0 + 4(8 \cdot 0 + 10) < 75$

$0 + 4(0 + 10) < 75$

$40 < 75$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 1$, то есть при $x < 1$.

Правильный ответ: $x < 1$.

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x) = 10x^8 - 6x^6 + 5x^4 - 3x$. В ответ запишите значение производной в точке $x = 1$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $(U + V)' = U' + V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = 10\left(x^8\right)' - 6\left(x^6\right)' + 5\left(x^4\right)' - 3(x)' = 10 \cdot 8x^{8-1} - 6 \cdot 6x^{6-1} + 5 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 1 =$$
$$= 80x^7 - 36x^5 + 20x^3 - 3.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x=1$. Для этого подставим в полученную производную $x=1$:

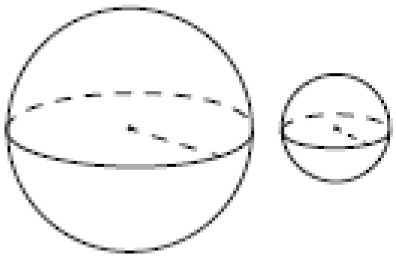
$$f'(1)=80\cdot1^7-36\cdot1^5+20\cdot1^3-3=80-36+20-3=61.$$

Правильный ответ: 61.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 16 и 4. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S=4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус как S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4\pi R_2{}^2}{4\pi R_1^2}=\frac{R_2{}^2}{R_1^2}=\frac{16^2}{4^2}=\frac{256}{16}=16.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 16 раз.

Правильный ответ: 16.

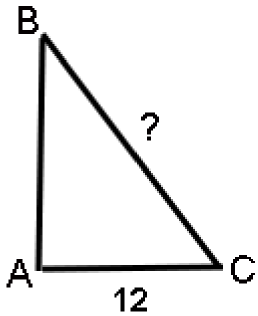
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\text{tg}B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AC = 12$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\text{tg}B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, угол $B = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, а катет $AC = 12$ по условию задачи. Получаем: $12 = BC \cdot \frac{1}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = 2 \cdot 12 = 24$.

Правильный ответ: 24.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{8x+4} = x-2$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение.

$$\left(\sqrt{8x+4}\right)^2 = \left(x-2\right)^2$$

$$8x+4 = x^2 - 2\cdot 2x + 2^2$$

$$8x+4 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 8x + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 - 8x - 4 = 0$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x\left(x-12\right) = 0$$

Из полученного выражения найдем корни уравнения: $x_1 = 0,\ x_2 = 12.$

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{8x+4} \geq 0$. Следовательно, $8x+4 \geq 0$. Откуда следует, что $x \geq -\frac{4}{8}$ или $x \geq -\frac{1}{2}$.

Так как корень неотрицателен, то выражение $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2.$ Объединяя $x \geq -\frac{1}{2}$ и $x \geq 2$ получаем: $x \geq 2$. Сравним полученные корни с выражением $x \geq 2$: $0 \geq 2$ – не выполняется, $12 > 2$ – выполняется. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень: $x = 12$.

Правильный ответ: 12.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 3t^2 - -9t + 11$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость, а первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю, а производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 3t^{3-1} - 3 \cdot 2t^{2-1} - 9 \cdot t^{1-1} + 0 = 6t^2 - 6t - 9.$$

Вычислим вторую производную:

$$a(t) = x''\left(t\right) = \left(6t^2 - 6t - 9\right)'' = 6 \cdot 2t^{2-1} - 6 \cdot t^{1-1} - 0 = 12t - 6.$$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет равно 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t.

$a(t) = 12t - 6 = 0.$ Откуда получаем: $t = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0.5.$

Правильный ответ: 0.5.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

a) $a\in[2;4)$

b) $a\in(2;4)$

c) $a\in[2;4]$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a>\dfrac{11}{9}$

g) $a\in[3;3.75]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a\neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант:

$$D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0$$

$$(a-2)(a-4)<0$$

Решение данного неравенства: $a \in (2;4)$.

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a \in [2;4)$.

Правильный ответ: $a \in [2;4)$.

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \frac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a < \frac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\frac{2}{3};0\right]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0$.

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2$.

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x = t^2+1-2a$

$x = z^2+a$

$t^2+1-2a = z^2+a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t + z = 1$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t + z = 1, \\ t^2 + 1 - 3a = z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение, такое, что $t \geq 0$, $z \geq 0$.

Из первого уравнения найдем *z*: $t = 1 - z \Rightarrow 1 - z \geq 0 \Rightarrow z \leq 1$. Аналогично $t \leq 1$.

Второе уравнение:

$$t^2 - z^2 = 3a - 1$$

$$(t - z)(t + z) = 3a - 1$$

Получим систему: $\begin{cases} t + z = 1, \\ (t - z)(t + z) = 3a - 1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2}a, \\ z = \dfrac{2 - 3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра *a* система имеет хотя бы одно решение: $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \leq 3a \leq 2, \\ 0 \leq \dfrac{2 - 3a}{2} \leq 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \leq a \leq \dfrac{2}{3}$.

При этом $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \leq a \leq \dfrac{2}{3}$.

(13 баллов)

Вариант 5

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 200 и 45.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Число	Делители
45	5
9	3
3	3
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$45 = 5 \cdot 3 \cdot 3$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot 5$

$45 = \underline{5} \cdot 3 \cdot 3$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

5 – наибольший общий делитель чисел 200 и 45.

Правильный ответ: 5.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{6}\right)\div\frac{9}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{9}{6}$ заменим умножением на число $\frac{6}{9}$. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{1\cdot 2+1\cdot 7}{6}\right)\cdot\frac{6}{9}=\frac{9}{6}\cdot\frac{6}{9}=1.$$

Правильный ответ: 1.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(4\sqrt{15}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{15}+5\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае: $a=4\sqrt{15},\ b=5$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(4\sqrt{15}-5\right)\cdot\left(4\sqrt{15}+5\right)=\left(4\sqrt{15}\right)^2-5^2=4^2\cdot 15-25=240-25=215.$$

Правильный ответ: 215.

(3 балла)

Вопрос 4

Пирог стоит 700 руб. Именинникам пекарня делает скидку 10%. Сколько рублей стоит пирог для именинника?

Решение

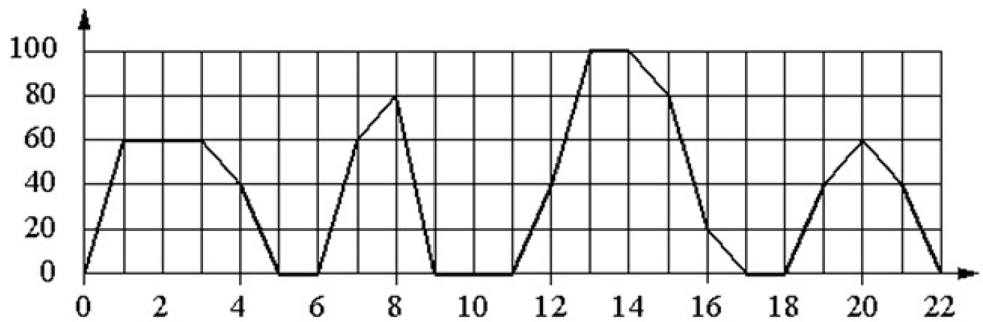
Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость пирога: $700 \cdot 0{,}10 = 70$ руб. Следовательно, для именинника пирог стоит: $700 - 70 = 630$ руб.

Правильный ответ: 630.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 2–3 мин.

1. Была остановка длительностью 2 мин.

2. Скорость не больше 20 км/ч на всем интервале.

3. Скорость составляла 60 км/ч на всем интервале.

4. Была остановка длительностью 1 мин.

Решение

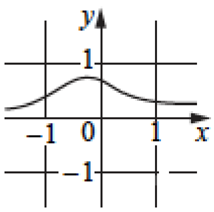
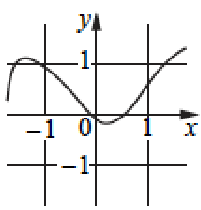
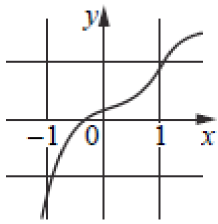
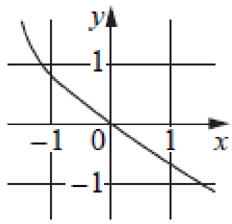
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 2–3 мин. Варианты 1 и 4 неверные, так как на всем интервале 2–3 мин нет участков, на которых скорость была бы равна нулю. Вариант 2 тоже неверный, так как максимальная скорость на интервале 2–3 составляет 60 км/ч. Этот факт соответствует варианту 3 – скорость составляла 60 км/ч на всем интервале.

Правильный ответ: 3.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой Г.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой В.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	4	3

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{6\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$$6\sin 120° \cdot \cos 120° = 3 \cdot 2 \cdot \sin 120° \cdot \cos 120° = 3 \cdot \sin(2 \cdot 120°) = 3\sin 240°.$$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{6\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°} = \frac{3\sin 240°}{\sin 240°} = 3.$$

Правильный ответ: 3.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 - 7x + 12 = 0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c,\ \ x_1 + x_2 = -b.$ Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно 12? Очевидно, что это числа 4 и 3. Сумма этих чисел равна 7. По теореме Виета, сумма корней должны быть равна коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Коэффициент b = –7. Сумма корней должна быть равна 7. Значит, корни уравнения будут такими: x_1 = 3, x_2 = 4. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 4.

Правильный ответ: 4.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 240, \\ 3x + y = -140. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы *y*.

$y = -140 - 3x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо *y* и найдем *x*.

$10x + 2(-140 - 3x) = 240$

$10x - 280 - 6x = 240$

$4x = 240 + 280$

$4x = 520$

$x = 130$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$y = -140 - 3x = -140 - 3 \cdot 130 = -140 - 390 = -530.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили *y* = –530.

Правильный ответ: –530.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $3x + 4(8x + 10) < 110.$

a) $x < 2$

b) $x > 2$

c) $x < 1$

d) $x > 1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$3x+4(8x+10)=110$

$3x+32x+40=110$

$35x=70.$ Откуда $x=2.$

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 2$. Одной из таких точек будет точка $x = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство и проверим знак.

$3\cdot 0+4(8\cdot 0+10)<110$

$0+4(0+10)<110$

$40<110$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 2$, то есть при $x < 2$.

Правильный ответ: $x<2.$

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x)=5x^4+3x^3-4x^2+10.$ В ответ запишите значение производной в точке $x=1.$

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$ Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $(U+V)'=U'+V'.$

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = 5\left(x^4\right)' + 3\left(x^3\right)' - 4\left(x^2\right)' + 10' = 5 \cdot 4x^{4-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} - 4 \cdot 2x^{2-1} + 0 =$$
$$= 20x^3 + 9x^2 - 8x.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 1$. Для этого подставим в полученную производную: $x = 1$.

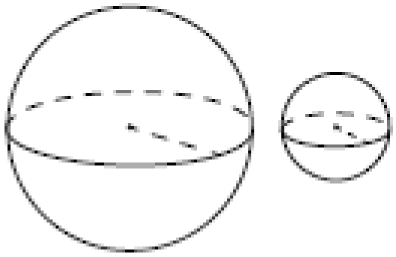
$$f'(1) = 20 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = 20 + 9 - 8 = 21.$$

Правильный ответ: 21.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 10 и 2. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{10^2}{2^2} = \frac{100}{4} = 25.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 25 раз.

Правильный ответ: 25.

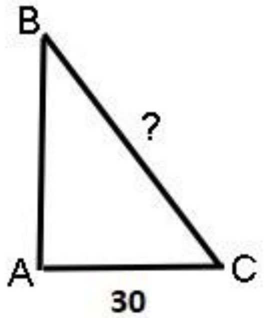
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен $90°$, $\mathrm{tg}B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AC = 30$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\mathrm{tg}B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, угол $B = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, а катет $AC = 30$ по условию задачи. Получаем: $30 = BC \cdot \frac{1}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = 2 \cdot 30 = 60$.

Правильный ответ: 60.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{4x+9}=x+1$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение:

$$\left(\sqrt{4x+9}\right)^2=\left(x+1\right)^2$$

$$4x+9=x^2+2\cdot 1x+1^2$$

$$4x+9=x^2+2x+1$$

$$x^2+2x+1=4x+9$$

$$x^2+2x+1-4x-9=0$$

$$x^2-2x-8=0$$

Так как коэффициент при $x^2=1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теореме, $x_1\cdot x_2=-8$, $x_1+x_2=2$. Получаем: $x_1=-2$, $x_2=4$.

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{4x+9}\ge 0$. Следовательно, $4x+9\ge 0$. Откуда следует, что $x\ge -\frac{9}{4}$. Так как корень неотрицателен, то выражение $x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$. Объединяя $x\ge -\frac{9}{4}$ и $x\ge -1$, получаем: $x\ge -1$. Сравним полученные корни с выражением $x\ge -1$: $-2>-1$ – не выполняется, $4>-1$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет один корень: $x=4$.

Правильный ответ: 4.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 8t^3 - 48t^2 - 5t + 10$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость. А первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$v(t) = x'(t) = 8 \cdot 3t^{3-1} - 48 \cdot 2t^{2-1} - 5 \cdot t^{1-1} + 0 = 24t^2 - 96t - 5.$

Вычислим вторую производную:

$a(t) = x''(t) = \left(24t^2 - 96t - 5\right)' = 24 \cdot 2t^{2-1} - 96 \cdot t^{1-1} - 0 = 48t - 96.$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет = 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t. $a(t) = 48t - 96 = 0.$ Откуда получаем: $t = \dfrac{96}{48} = 2.$

Правильный ответ: 2.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения *a*, при которых уравнение $(a-2)x^2+$ $+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

a) $a\in[2;4)$

b) $a\in(2;4)$

c) $a\in[2;4]$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a>\dfrac{11}{9}$

g) $a\in[3;3.75]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра *a* уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a\neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант: $D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0.$

$(a-2)(a-4)<0.$

Решение данного неравенства: $a\in(2;4).$

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a\in[2;4).$

Правильный ответ: $a\in[2;4).$

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \frac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a<\frac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\frac{2}{3};0\right]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0.$

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2.$

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x=t^2+1-2a$

$x=z^2+a$

$t^2+1-2a=z^2+a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t+z=1.$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t+z=1, \\ t^2+1-3a=z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение – такое, что $t \ge 0,\ z \ge 0.$

Из первого уравнения найдем z: $t=1-z \Rightarrow 1-z \ge 0 \Rightarrow z \le 1.$ Аналогично $t \le 1.$

Второе уравнение: $t^2 - z^2 = 3a - 1.$

$(t - z)(t + z) = 3a - 1.$

Получим систему: $\begin{cases} t + z = 1, \\ (t - z)(t + z) = 3\text{a} - 1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2}a, \\ z = \dfrac{2 - 3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0 \le t \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \le 3a \le 2, \\ 0 \le \dfrac{2 - 3a}{2} \le 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}.$

При этом $0 \le t \le 1,\ 0 \le z \le 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}.$

(13 баллов)

Вариант 6

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 200 и 50.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Число	Делители
50	2
25	5
5	5
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$200 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

$50 = \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

$2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ – наибольший общий делитель чисел 200 и 50.

Правильный ответ: 50.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{2\cdot 2+1\cdot 1}{6}\right)\cdot 6=\frac{5}{6}\cdot 6=5.$$

Правильный ответ: 5.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(3\sqrt{15}-1\right)\cdot\left(3\sqrt{15}+1\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае: $a=3\sqrt{15},\ b=1$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(3\sqrt{15}-1\right)\cdot\left(3\sqrt{15}+1\right)=\left(3\sqrt{15}\right)^2-1^2=3^2\cdot 15-1=135-1=134.$$

Правильный ответ: 134.

(3 балла)

Вопрос 4

Пирог стоит 700 руб. Студентам пекарня делает скидку 5%. Сколько рублей стоит пирог для студента?

Решение

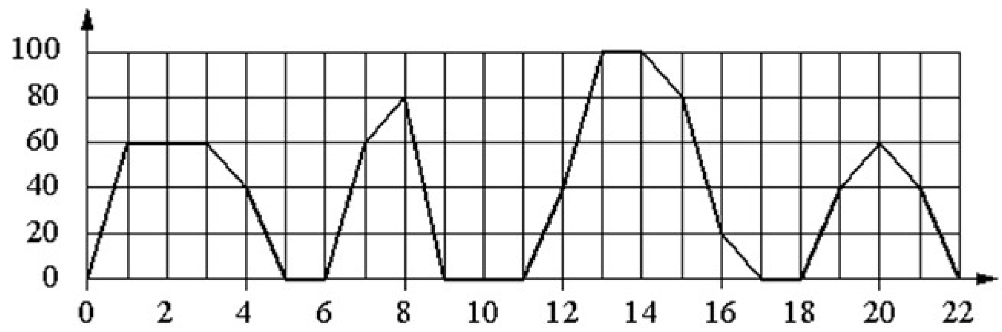
Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость пирога: $700 \cdot 0{,}05 = 35$ руб. Следовательно, для студента пирог стоит: $700 - 35 = 665$ руб.

Правильный ответ: 665.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 13–15 мин.

1. Скорость составляла 100 км/ч на всем интервале.

2. Максимальная скорость составляла скорость 100 км/ч

3. Скорость не больше 60 км/ч.

4. Была остановка длительностью 1 мин.

Решение

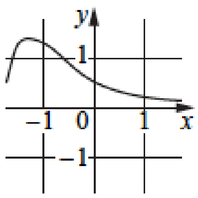
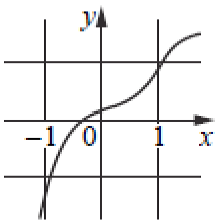
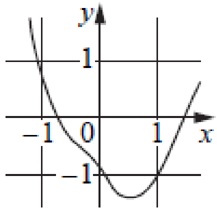
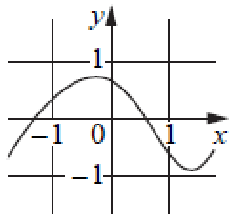
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 13–15 мин. Из графика видно, что на данном интервале скорость была разная, но максимальная равна 100 км/ч. Данный факт соответствует варианту 2 – максимальная скорость автобуса составляла 100 км/ч на указанном интервале.

Правильный ответ: 2.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой Г.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой В.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой А.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$» соответствует график под буквой Б.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
3	4	2	1

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{20\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 240^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$$20\sin 120° \cdot \cos 120° = 10 \cdot 2 \cdot \sin 120° \cdot \cos 120° = 10 \cdot \sin(2 \cdot 120°) = 10\sin 240°.$$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{20\sin 120° \cdot \cos 120°}{\sin 240°} = \frac{10\sin 240°}{\sin 240°} = 10.$$

Правильный ответ: 10.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 - x - 6 = 0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1,$ то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c,$ $x_1 + x_2 = -b.$ Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно –6? Очевидно, что это числа 2 и –3 или –2 и 3. По теореме Виета, сумма корней должна быть равна коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Коэффициент $b = -1$. Следовательно, сумма корней должна быть равна 1. Значит, корни уравнения будут такими: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 3.

Правильный ответ: 3.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 240, \\ 3x + y = 140. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы *y*.

$y = 140 - 3x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо *y* и найдем *x*.

$10x + 2(140 - 3x) = 240$

$10x + 280 - 6x = 240$

$4x = 240 - 280$

$4x = -40$

$x = -10$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$y = 140 - 3x = 140 - 3 \cdot (-10) = 140 + 30 = 170.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили *y* = 170.

Правильный ответ: 170.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $3x + 4(8x + 10) < 145.$

a) $x > 3$

b) $x > 2$

c) $x < 3$

d) $x > 1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$3x+4(8x+10)=145$

$3x+32x+40=145$

$35x=105$. Откуда $x=3$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 3$. Одной из таких точек будет точка $x = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство и проверим знак.

$3\cdot 0+4(8\cdot 0+10)<145$

$0+4(0+10)<145$

$40<145$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 3$, то есть при $x < 3$.

Правильный ответ: $x<3$.

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x)=10x^5-6x^3+5x^2-3x$. В ответ запишите значение производной в точке $x=1$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $(U+V)'=U'+V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = 10\left(x^5\right)' - 6\left(x^3\right)' + 5\left(x^2\right)' - 3(x)' = 10 \cdot 5x^{5-1} - 6 \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 2x^{2-1} - 3 \cdot 1 =$$
$$= 50x^4 - 18x^2 + 10x - 3.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 1$. Для этого подставим в полученную производную: $x = 1$.

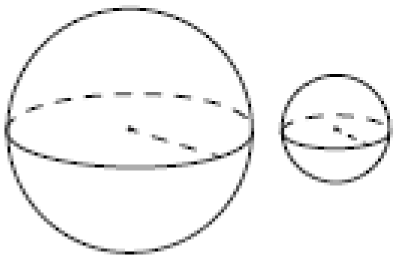
$$f'(1) = 50 \cdot 1^4 - 18 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 3 = 50 - 18 + 10 - 3 = 39.$$

Правильный ответ: 39.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 10 и 5. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2{}^2}{4\pi R_1{}^2} = \frac{R_2{}^2}{R_1{}^2} = \frac{10^2}{5^2} = \frac{100}{25} = 4.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 4 раза.

Правильный ответ: 4.

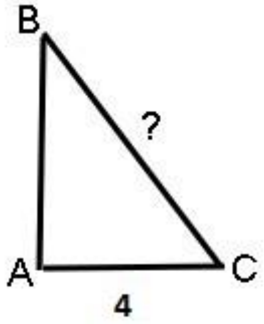
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\mathrm{ctg}B = \sqrt{3}$, $AC = 4$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\mathrm{ctg}B = \sqrt{3}$, значит, угол $B = \mathrm{arcctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, а катет AC = 4 по условию задачи. Получаем: $4 = BC \cdot \frac{1}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = 8$.

Правильный ответ: 8.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{6x+7} = x+2$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение:

$$\left(\sqrt{6x+7}\right)^2 = (x+2)^2$$

$$6x+7 = x^2 + 2\cdot 2x + 2^2$$

$$6x+7 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 6x + 7$$

$$x^2 + 4x + 4 - 6x - 7 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Так как коэффициент при $x^2 = 1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теореме, $x_1 \cdot x_2 = -3$, $x_1 + x_2 = 2$. Получаем: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{6x+7} \geq 0$. Следовательно, $6x+7 \geq 0$. Откуда следует, что $x \geq -\frac{7}{6}$. Так как корень неотрицателен, то выражение $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Объединяя $x \geq -\frac{7}{6}$ и $x \geq -2$, получаем: $x \geq -2$. Сравним полученные корни с выражением $x \geq -2$: $-1 > -2$ – выполняется, $3 > -1$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. По условию задачи, в ответ нужно записать их сумму: –1 + 3 = 2.

Правильный ответ: 2.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 12t^2 - 2t + 3$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость. А первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 3t^{3-1} - 12 \cdot 2t^{2-1} - 2 \cdot t^{1-1} + 0 = 6t^2 - 24t - 2.$$

Вычислим вторую производную:

$$a(t) = x''(t) = \left(6t^2 - 24t - 2\right)' = 6 \cdot 2t^{2-1} - 24 \cdot t^{1-1} - 0 = 12t - 24.$$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет = 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t. $a(t) = 12t - 24 = 0.$ Откуда получаем: $t = \dfrac{24}{12} = 2.$

Правильный ответ: 2.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2+$ $+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

a) $a \in [2;4)$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4]$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a>\frac{11}{9}$

g) $a \in [3;3.75]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a \neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант: $D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0.$

$(a-2)(a-4)<0.$

Решение данного неравенства: $a \in (2;4).$

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a \in [2;4).$

Правильный ответ: $a \in [2;4).$

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a < \dfrac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\dfrac{2}{3};0\right]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0.$

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2.$

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x=t^2+1-2a$

$x=z^2+a$

$t^2+1-2a=z^2+a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t+z=1.$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t+z=1, \\ t^2+1-3a=z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение – такое, что $t \ge 0,\ z \ge 0.$

Из первого уравнения найдем z: $t=1-z \Rightarrow 1-z \ge 0 \Rightarrow z \le 1.$ Аналогично $t \le 1.$

Второе уравнение: $t^2 - z^2 = 3a - 1.$

$(t - z)(t + z) = 3a - 1.$

Получим систему: $\begin{cases} t + z = 1, \\ (t - z)(t + z) = 3\text{a} - 1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2}a, \\ z = \dfrac{2 - 3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0 \le t \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \le 3a \le 2, \\ 0 \le \dfrac{2 - 3a}{2} \le 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}.$

При этом $0 \le t \le 1,\ 0 \le z \le 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}.$

(13 баллов)

Вариант 7

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 200 и 15.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Число	Делители
15	5
3	3
1	

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$15 = 5 \cdot 3$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot 5$

$15 = \underline{5} \cdot 3$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

5 – наибольший общий делитель чисел 200 и 15.

Правильный ответ: 5.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{4\cdot 2+1\cdot 1}{6}\right)\cdot 6=\frac{9}{6}\cdot 6=9.$$

Правильный ответ: 9.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(4\sqrt{13}-3\right)\cdot\left(4\sqrt{13}+3\right)$.

Решение. Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае: $a=4\sqrt{13}$, $b=3$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(4\sqrt{13}-3\right)\cdot\left(4\sqrt{13}+3\right)=\left(4\sqrt{13}\right)^2-3^2=4^2\cdot 13-9=208-9=199.$$

Правильный ответ: 199.

(3 балла)

Вопрос 4

Торт стоит 1200 руб. Именинникам пекарня делает скидку 10%. Сколько рублей стоит торт для именинника?

Решение

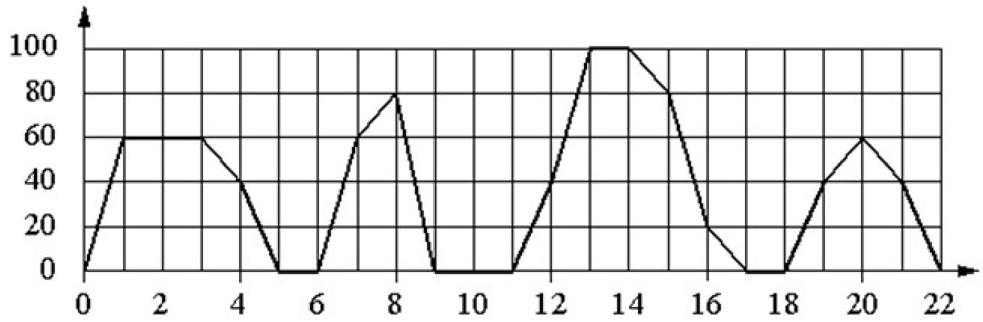
Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость торта: $1200 \cdot 0{,}10 = 120$ руб. Следовательно, для именинника торт стоит: $1200 - 120 =$ $= 1080$ руб.

Правильный ответ: 1080.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 5–6 мин.

1. Была остановка длительностью 2 мин.

2. Скорость не меньше 20 км/ч на всем интервале.

3. Скорость не больше 60 км/ч.

4. Была остановка длительностью 1 мин.

Решение

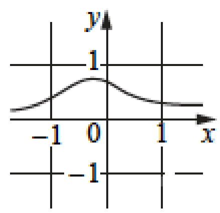
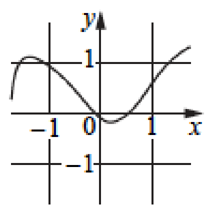
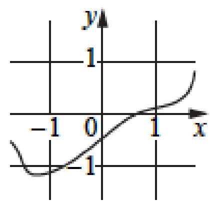
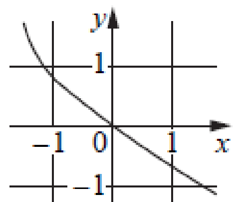
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 5–6 мин. Из графика видно, что на всем данном интервале скорость равна нулю. Следовательно, у автобуса на интервале 5–6 мин была остановка длительностью 1 мин.

Правильный ответ: 4.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке $[-1;\ 1]$» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке $[-1;\ 1]$» соответствует график под буквой Г.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке $[-1;\ 1]$» соответствует график под буквой В.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	4	3

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{8\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$8\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = 4 \cdot 2 \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = 4 \cdot \sin(2 \cdot 10^\circ) = 4\sin 20^\circ.$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{8\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4.$$

Правильный ответ: 4.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 + 2x - 15 = 0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1$, то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c,\ x_1 + x_2 = -b$. Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно –15? Очевидно, что это числа 5 и –3 или –3 и 5. По теореме Виета, сумма корней должна быть равна коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Коэффициент $b = 2$. Следовательно, сумма корней должна быть равна –2. Значит, корни уравнения будут такими: $x_1 = -5$, $x_2 = 3$. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 3.

Правильный ответ: 3.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 24, \\ 3x + y = 14. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы *y*.

$y = 14 - 3x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо *y* и найдем *x*.

$10x + 2(14 - 3x) = 24$

$10x + 28 - 6x = 24$

$4x = 24 - 28$

$4x = -4$

$x = -1$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$y = 14 - 3x = 14 - 3 \cdot (-1) = 14 + 3 = 17.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили *y* = 17.

Правильный ответ: 17.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $3x + 4(8x + 10) < 180$.

a) $x > 4$

b) $x > 2$

c) $x < 4$

d) $x > 1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$3x+4(8x+10)=180$

$3x+32x+40=180$

$35x=140$. Откуда $x=4$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 4$. Одной из таких точек будет точка $x = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство и проверим знак.

$3\cdot 0+4(8\cdot 0+10)<180$

$0+4(0+10)<180$

$40<180$

Видно, что неравенство выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси левее точки $x = 4$, то есть при $x < 4$.

Правильный ответ: $x<4$.

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x)=2x^5-3x^3+x^2-5x$. В ответ запишите значение производной в точке $x=1$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U+V\right)'=U'+V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = 2\left(x^5\right)' - 3\left(x^3\right)' + \left(x^2\right)' - 5(x)' = 2 \cdot 5x^{5-1} - 3 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot x^{2-1} - 5 \cdot 1 =$$
$$= 10x^4 - 9x^2 + 2x - 5.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 1$. Для этого подставим в полученную производную: $x = 1$.

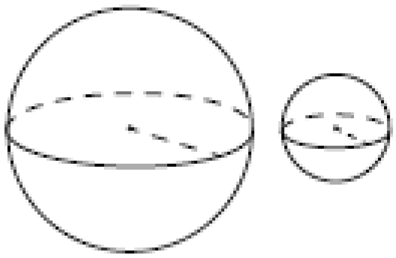
$$f'(1) = 10 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 10 - 9 + 2 - 5 = -2.$$

Правильный ответ: –2.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 16 и 8. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{16^2}{8^2} = \frac{256}{64} = 4.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 4 раза.

Правильный ответ: 4.

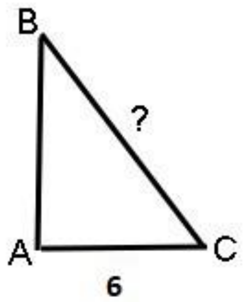
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен 90°, $\operatorname{tg}B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AC = 6$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\operatorname{tg}B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, угол $B = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, а катет AC = 6 по условию задачи. Получаем: $6 = BC \cdot \frac{1}{2}$. Из данного выражения находим BC: $BC = 2 \cdot 6 = 12$.

Правильный ответ: 12.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{3x+13}=x+3$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение:

$$\left(\sqrt{3x+13}\right)^2=\left(x+3\right)^2$$

$$3x+13=x^2+2\cdot 3x+3^2$$

$$3x+13=x^2+6x+9$$

$$x^2+6x+9=3x+13$$

$$x^2+6x+9-3x-13=0$$

$$x^2+3x-4=0$$

Так как коэффициент при $x^2=1$, то найдем корни уравнения по теореме Виета. Согласно данной теореме, $x_1\cdot x_2=-4$, $x_1+x_2=-3$. Получаем: $x_1=-4$, $x_2=1$.

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{3x+13}\geq 0$. Следовательно, $3x+13\geq 0$. Откуда следует, что $x\geq -\frac{13}{3}$. Так как корень неотрицателен, то выражение $x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3$. Объединяя $x\geq -\frac{13}{3}$ и $x\geq -3$, получаем: $x\geq -3$. Сравним полученные корни с выражением $x\geq -3$: $-4>-3$ – не выполняется, $1>-3$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет один корень: $x=1$.

Правильный ответ: 1.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 18t^2 - 2t + 3$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость. А первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 3t^{3-1} - 18 \cdot 2t^{2-1} - 2 \cdot t^{1-1} + 0 = 6t^2 - 36t - 2.$

Вычислим вторую производную:

$a(t) = x''(t) = \left(6t^2 - 36t - 2\right)' = 6 \cdot 2t^{2-1} - 36 \cdot t^{1-1} - 0 = 12t - 36.$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет = 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t. $a(t) = 12t - 36 = 0$. Откуда получаем: $t = \dfrac{36}{12} = 3.$

Правильный ответ: 3.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2+$ $+2(a-2)x+2=0$ не имеет действительных корней.

a) $a\in[2;4)$

b) $a\in(2;4)$

c) $a\in[2;4]$

d) $a=1$

e) $a=2$

f) $a>\frac{11}{9}$

g) $a\in[3;3.75]$

h) $a>6$

i) $a=-12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2)=0,$ то есть $a=2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2=0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a\neq 2.$ Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант: $D=b^2-4ac=4(a-2)^2-8(a-2)<0.$

$(a-2)(a-4)<0.$

Решение данного неравенства: $a\in(2;4).$

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a\in[2;4).$

Правильный ответ: $a\in[2;4).$

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \frac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a < \frac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\frac{2}{3};0\right]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1}=t,\ \sqrt{x-a}=z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0.$

Тогда $x+2a-1=t^2,\ x-a=z^2.$

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x=t^2+1-2a$

$x=z^2+a$

$t^2+1-2a=z^2+a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t+z=1.$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t+z=1, \\ t^2+1-3a=z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение – такое, что $t \ge 0,\ z \ge 0.$

Из первого уравнения найдем z: $t=1-z \Rightarrow 1-z \ge 0 \Rightarrow z \le 1.$ Аналогично $t \le 1.$

Второе уравнение: $t^2 - z^2 = 3a - 1$.

$(t - z)(t + z) = 3a - 1$.

Получим систему: $\begin{cases} t + z = 1, \\ (t - z)(t + z) = 3a - 1. \end{cases}$

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2}a, \\ z = \dfrac{2 - 3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0 \le t \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \le 3a \le 2, \\ 0 \le \dfrac{2 - 3a}{2} \le 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$.

При этом $0 \le t \le 1,\ 0 \le z \le 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \le a \le \dfrac{2}{3}$.

(13 баллов)

Вариант 8

(с решениями)

Вопрос 1

Найдите наибольший общий делитель натуральных чисел: 200 и 125.

Решение

Разобьем решение на несколько шагов.

Первый шаг: найдем наибольший общий делитель чисел с помощью разложения на простые множители. Для этого каждое число будем делить на простой множитель до того момента, пока остаток не станет равен 1. Оформим деление в столбик.

Число	Делители	Число	Делители
200	2	125	5
100	2	25	5
50	2	5	5
25	5	1	
5	5		
1			

Запишем разложение на простые множители в строчку:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

Второй шаг: подчеркнем общие простые множители:

$200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{5}$

$125 = \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot 5$

Третий шаг: найдем произведение подчеркнутых простых множителей одного числа. Оно и будет являться наибольшим общим делителем двух чисел.

$5 \cdot 5 = 25$ – наибольший общий делитель чисел 200 и 125.

Правильный ответ: 25.

(3 балла)

Вопрос 2

Найдите значение выражения: $\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{6}\right)\div\frac{1}{6}$.

Решение

Выражение, записанное в скобках, приведем к общему знаменателю, а деление на $\frac{1}{6}$ заменим умножением на число 6. Выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$\left(\frac{4\cdot 2+2\cdot 1}{6}\right)\cdot 6=\frac{10}{6}\cdot 6=10.$$

Правильный ответ: 10.

(4 балла)

Вопрос 3

Найдите значение выражения: $\left(3\sqrt{13}-3\right)\cdot\left(3\sqrt{13}+3\right)$.

Решение

Для нахождения значения данного выражения необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения. Разность квадратов определяется следующим образом: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)$. В нашем случае: $a=3\sqrt{13},\ b=3$. Подставив данные значения в формулу, получаем:

$$\left(3\sqrt{13}-3\right)\cdot\left(3\sqrt{13}+3\right)=\left(3\sqrt{13}\right)^2-3^2=3^2\cdot 13-9=117-9=108.$$

Правильный ответ: 108.

(3 балла)

Вопрос 4

Торт стоит 1500 руб. Студентам пекарня делает скидку 5%. Сколько рублей стоит торт для студента?

Решение

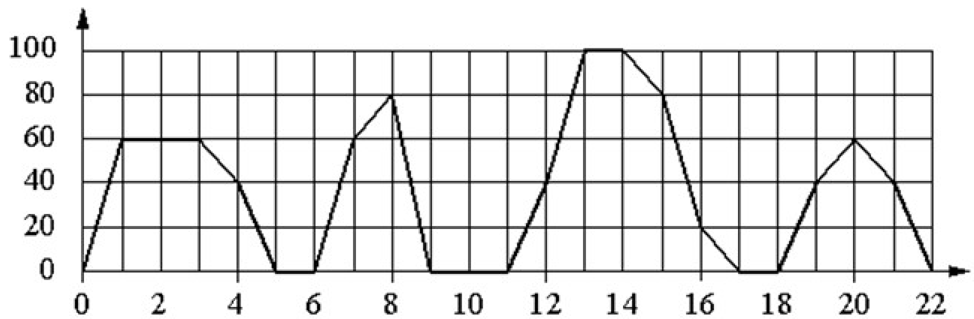
Найдем размер скидки в рублях, зная процент скидки и стоимость торта: $1500 \cdot 0{,}05 = 75$ руб. Следовательно, для студента торт стоит: $1500 – 75 = 1425$ руб.

Правильный ответ: 1425.

(3 балла)

Вопрос 5

На графике изображена зависимость скорости движения рейсового автобуса от времени. На вертикальной оси отмечена скорость автобуса (км/ч), на горизонтальной – время (мин), прошедшее с начала движения автобуса.



Пользуясь графиком, укажите характеристику скорости движения рейсового автобуса для интервала времени 14–16 мин.

1. Была остановка длительностью 2 мин.

2. Скорость не меньше 20 км/ч на всем интервале.

3. Скорость не больше 60 км/ч.

4. Была остановка длительностью ровно 1 мин.

Решение

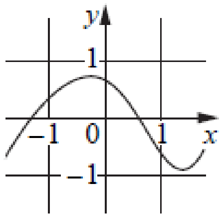
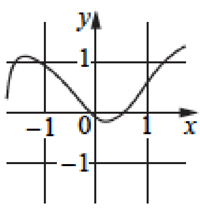
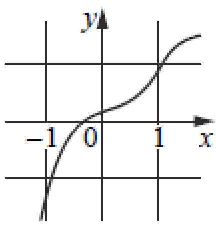
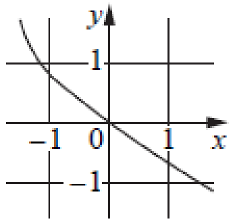
Проанализируем варианты ответа и посмотрим на график в интервале 14–16 мин. Варианты 1, 4 неверные, так как на всем интервале 14–16 мин нет участков, на которых скорость была бы равна нулю. Вариант 3 тоже неверный, так как максимальная скорость на интервале 14–16 мин составляет 100 км/ч. Проверим вариант 2. По графику видим, что минимальная скорость на интервале 14–16 составляет 20 км/ч (в момент времени = 16 мин). В остальные интервалы времени скорость выше 20 км/ч. Следовательно, можно сделать вывод о том, что на всем интервале 14–16 скорость автобуса не меньше 20 км/ч.

Правильный ответ: 2.

(3 балла)

Вопрос 6

Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке [−1; 1].

А	Б	В	Г
			

Характеристики функций:

1. Функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1].
2. Функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1].
3. Функция убывает на отрезке [−1; 1].
4. Функция возрастает на отрезке [−1; 1].

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение

Точка максимума – это такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальный «холмик». Следовательно, характеристике «функция имеет точку максимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой А.

Точка минимума – такая внутренняя точка графика, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. На графике выглядит как локальная «ямка». Следовательно, характеристике «функция имеет точку минимума на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Б.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция убывает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой Г.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, характеристике «функция возрастает на отрезке [−1; 1]» соответствует график под буквой В.

Правильный ответ:

А	Б	В	Г
1	2	4	3

(6 баллов)

Вопрос 7

Найдите значение выражения: $\dfrac{10\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ}{\sin 10^\circ}$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической формулой двойного угла:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Числитель выражения в соответствии с формулой двойного угла преобразуется следующим образом:

$$10\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ = 5 \cdot 2 \cdot \sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ = 5 \cdot \sin(2 \cdot 5^\circ) = 5\sin 10^\circ.$$

Подставим полученное выражение в исходное вместо числителя, в итоге получим:

$$\frac{10\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{5\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 5.$$

Правильный ответ: 5.

(4 балла)

Вопрос 8

Решите уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0.$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение

Если в квадратном уравнении вида: $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициент $a = 1,$ то можно воспользоваться теоремой Виета. Согласно данной теореме, произведение корней равно свободному члену c, а сумма корней коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. То есть $x_1 \cdot x_2 = c,\ x_1 + x_2 = -b.$ Зададимся вопросом: произведение каких двух чисел равно 6? Очевидно, что это числа 2 и 3 или –2 и –3. По теореме Виета, сумма корней должны быть равна коэффициенту b, взятому с противоположным знаком. Коэффициент b = –5. Сумма корней должна быть равна 5. Значит, корни уравнения будут такими: x_1 = 2, x_2 = 3. В задаче требуется в качестве ответа указать больший корень. Больший корень = 3.

Правильный ответ: 3.

(3 балла)

Вопрос 9

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 10x + 2y = 24, \\ 3x + y = 4. \end{cases}$

Укажите в ответе, чему равен *y*.

Решение

Распишем решение по шагам.

Первый шаг. Выразим из второго уравнения системы *y*.

$y = 4 - 3x$

Второй шаг. Подставим полученное выражение в первое уравнение вместо *y* и найдем *x*.

$10x + 2(4 - 3x) = 24$

$10x + 8 - 6x = 24$

$4x = 24 - 8$

$4x = 16$

$x = 4$

Третий шаг. Подставим найденное значение *x* в выражение для *y*, полученное на первом шаге, и найдем *y*.

$y = 4 - 3x = 4 - 3 \cdot 4 = 4 - 12 = -8.$

В задаче требуется в качестве ответа указать, чему равен *y*. Получили *y* = –8.

Правильный ответ: –8.

(4 балла)

Вопрос 10

Решите неравенство: $3x + 4(8x + 10) > 180.$

a) $x > 4$

b) $x > 2$

c) $x < 4$

d) $x > 1$

Решение

Чтобы решить неравенство, сначала нужно решить соответствующее уравнение:

$3x+4(8x+10)=180$

$3x+32x+40=180$

$35x=140$. Откуда $x=4$.

Данный корень является точкой смена знака в неравенстве. Возьмем точку, расположенную на числовой оси левее точки $x = 4$. Одной из таких точек будет точка $x = 0$. Подставим $x = 0$ в исходное неравенство и проверим знак.

$3\cdot 0+4(8\cdot 0+10)>180$

$0+4(0+10)>180$

$40>180$

Видно, что неравенство не выполняется. Следовательно, решение неравенства будет на числовой оси правее точки $x = 4$, то есть при $x > 4$.

Правильный ответ: $x>4$.

(4 балла)

Вопрос 11

Найдите производную функции: $f(x)=2x^4-3x^2+5x$. В ответ запишите значение производной в точке $x=2$.

Решение

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $(U+V)'=U'+V'$.

Следовательно, производная функции $f(x)$ равна:

$$f'(x) = 2\left(x^4\right)' - 3\left(x^2\right)' + 5\left(x\right)' = 2\cdot 4x^{4-1} - 3\cdot 2x^{2-1} + 5\cdot 1x^{1-1} = 8x^3 - 6x + 5.$$

Вычислим значение производной функции в точке $x = 2$. Для этого подставим в полученную производную: $x = 2$.

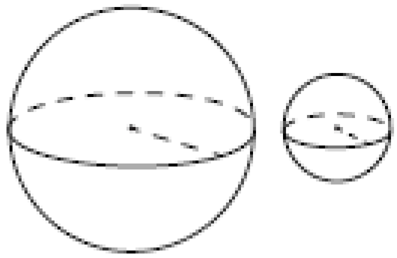
$$f'(2) = 8\cdot 2^3 - 6\cdot 2 + 5 = 64 - 12 + 5 = 57.$$

Правильный ответ: 57.

(4 балла)

Вопрос 12

Даны два шара радиусами 25 и 5. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?



Решение

Применим формулу для нахождения площади поверхности шара: $S = 4\pi R^2$. Обозначим площадь поверхности большего шара и его радиус – S_2 и R_2, площадь поверхности меньшего шара и его радиус – S_1 и R_1. Запишем отношение площади большего шара к площади меньшего шара, подставив в формулу радиусы шаров:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi {R_2}^2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = \frac{25^2}{5^2} = \frac{625}{25} = 25.$$

Получили, что площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего шара в 25 раз.

Правильный ответ: 25.

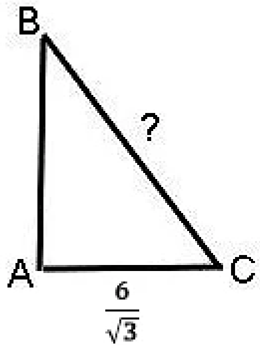
(4 балла)

Вопрос 13

В треугольнике ABC угол A равен $90°$, $\operatorname{ctg} B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AC = \frac{6}{\sqrt{3}}$. Найдите BC. Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до двух знаков после запятой.

Решение

Для наглядности построим прямоугольный треугольник:



Известно, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла. Длина катета AC известна по условию задачи, также известен тангенс противолежащего этому катета угла B. Следовательно, найдя угол B, мы сможем вычислить гипотенузу. По условию задачи, $\operatorname{ctg} B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, угол $B = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. Запишем выражение в соответствии с тем, что катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла: $AC = BC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а катет $AC = \frac{6}{\sqrt{3}}$ по условию задачи. Получаем:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из данного выражения находим BC:

$\sqrt{3} \cdot BC \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 6.$

$3BC = 12 \Rightarrow BC = 4.$

Правильный ответ: 4.

(12 баллов)

Вопрос 14

Решите уравнение: $\sqrt{2x+1} = x-1.$ Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней.

Решение

Для решения данного уравнения необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, привести подобные слагаемые и решить полученное уравнение:

$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (x-1)^2$

$2x+1 = x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2$

$2x+1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 - 2x - 1 = 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

Следовательно, корни уравнения: $x_1 = 0,$ $x_2 = 4.$

Так как в левой части исходного уравнения квадратный корень, то $\sqrt{2x+1} \geq 0.$ Следовательно, $2x+1 \geq 0.$ Откуда следует, что $x \geq -\frac{1}{2}.$ Так как корень неотрицателен, то выражение $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.$ Объединяя $x \geq -\frac{1}{2}$ и $x \geq 1,$ получаем: $x \geq 1.$ Сравним полученные корни с выражением $x \geq 1$: $0 > 1$ – не выполняется, $4 > 1$ – выполняется.

Следовательно, исходное уравнение имеет один корень: $x = 4$.

Правильный ответ: 4.

(8 баллов)

Вопрос 15

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - 24t^2 - 10t + 15$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчета в метрах; t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) после начала движения ее ускорение станет равным 0 м/с^2? Ответ запишите в виде целого числа или конечной десятичной дроби, округлив до одного знака после запятой.

Решение

Известно, что первая производная расстояния есть скорость. А первая производная скорости есть ускорение. Следовательно, для того чтобы найти ускорение, нужно отыскать вторую производную от $x(t)$.

Для нахождения производной воспользуемся таблицей производных. Найдем в таблице производную степенной функции: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Учтем, что производная константы равна нулю. А также то, что производная алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме производных этих функций, то есть $\left(U + V\right)' = U' + V'$.

Следовательно, первая производная функции $x(t)$ равна:

$$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 3t^{3-1} - 24 \cdot 2t^{2-1} - 10 \cdot t^{1-1} + 0 = 6t^2 - 48t - 10.$$

Вычислим вторую производную:

$$a(t) = x''(t) = \left(6t^2 - 48t - 10\right)' = 6 \cdot 2t^{2-1} - 48 \cdot t^{1-1} - 0 = 12t - 48.$$

По условию задачи, нужно найти момент времени t, при котором ускорение станет = 0. Приравняем к нулю найденное выражение для $a(t)$ и найдем t.

$a(t) = 12t - 48 = 0.$ Откуда получаем: $t = \frac{48}{12} = 4.$

Правильный ответ: 4.

(8 баллов)

Вопрос 16

Найдите все значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет действительных корней.

a) $a \in [2;4)$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4]$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a > \frac{11}{9}$

g) $a \in [3;3.75]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Имеем дело с квадратным уравнением, однако в случае, когда коэффициент при x^2 равен нулю, уравнение станет линейным. Рассмотрим два случая: 1) уравнение линейное и 2) уравнение квадратное.

1. Уравнение будет линейным, если $(a-2) = 0,$ то есть $a = 2.$ При данном значении параметра a уравнение примет вид: $2 = 0.$ Оно не имеет действительных корней. Один из ответов на поставленный в задаче вопрос найден.

2. Уравнение будет квадратным, если $a \neq 2$. Оно не имеет действительных корней тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Найдем дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 4(a-2)^2 - 8(a-2) < 0.$

$(a-2)(a-4) < 0.$

Решение данного неравенства: $a \in (2;4).$

С учетом пункта 1 получаем ответ: $a \in [2;4).$

Правильный ответ: $a \in [2;4).$

(14 баллов)

Вопрос 17

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1} + \sqrt{x-a} = 1$ имеет хотя бы один корень.

a) $0 \le a \le \frac{2}{3}$

b) $a \in (2;4)$

c) $a \in [2;4)$

d) $a = 1$

e) $a = 2$

f) $a < \frac{2}{3}$

g) $a \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right]$

h) $a > 6$

i) $a = -12$

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x+2a-1} = t,$ $\sqrt{x-a} = z,$ где $t \ge 0$ и $z \ge 0.$

Тогда $x + 2a - 1 = t^2,$ $x - a = z^2.$

Выразим из обоих уравнений x и приравняем:

$x = t^2 + 1 - 2a$

$x = z^2 + a$

$t^2 + 1 - 2a = z^2 + a$

Исходное уравнение с учетом замены получилось таким: $t + z = 1$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} t + z = 1, \\ t^2 + 1 - 3a = z^2. \end{cases}$

Эта система должна иметь хотя бы одно решение – такое, что $t \geq 0$, $z \geq 0$.

Из первого уравнения найдем z: $t = 1 - z \Rightarrow 1 - z \geq 0 \Rightarrow z \leq 1$. Аналогично $t \leq 1$.

Второе уравнение: $t^2 - z^2 = 3a - 1$.

$(t - z)(t + z) = 3a - 1$.

Получим систему: $\begin{cases} t + z = 1, \\ (t - z)(t + z) = 3a - 1. \end{cases}$.

Найдем сумму и разность уравнений системы и получим: $\begin{cases} t = \dfrac{3}{2}a, \\ z = \dfrac{2 - 3a}{2}. \end{cases}$

Нужно найти, при каких значениях параметра a система имеет хотя бы одно решение: $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Запишем условия для параметра: $\begin{cases} 0 \leq 3a \leq 2, \\ 0 \leq \dfrac{2 - 3a}{2} \leq 1. \end{cases}$

Найдем решения обоих неравенств. Оба неравенства дают решение: $0 \leq a \leq \dfrac{2}{3}$.

При этом $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ исходное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Правильный ответ: $0 \leq a \leq \dfrac{2}{3}$.

(13 баллов)