

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Информатика и ИКТ (Информатика и основы программирования)

Открытый билет

Вариант 1

(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Сколько значащих нулей в двоичной записи восьмеричного числа 157535_8 ?

Решение

Составим таблицу соответствия записи первых восьми цифр в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

Заменим в числе 157535_8 каждую цифру ее двоичным эквивалентом из таблицы.

001 101 111 101 011 101₂

Крайние слева нули не являются значащими. Поэтому их можно убрать.
Остается четыре нуля.

Правильный ответ: 4.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $A8_{16} < N < 10110001_2$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления.

Составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Заменяем в числе $A8_{16}$ каждую цифру ее двоичным эквивалентом:

$$1010\ 1000_2.$$

Вычтем из 10110001_2 полученное число.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Так как неравенство строгое, необходимо вычесть еще единицу. В результате получим: 1000_2 .

Правильный ответ: 8.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $20321_4 + 315_7 - 77_9$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

$$20321_4 \Rightarrow 2 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 512 + 48 + 8 + 1 = 569_{10}$$

$$315_7 \Rightarrow 3 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 147 + 7 + 5 = 159_{10}$$

$$77_9 \Rightarrow 7 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0 = 63 + 7 = 70_{10}$$

Подставляем в исходное выражение и вычисляем:

$$569 + 159 - 70 = 658.$$

Правильный ответ: 658.

(5 баллов)

Чтобы сложить три числа, нужно привести их в одну систему счисления. Поскольку ответ необходимо дать в десятичной системе счисления, запишем все исходные данные в ней.

$$247_8 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 128 + 32 + 7 = 167_{10}$$

$$82_{16} = 8 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 128 + 2 = 130_{10}$$

$$1001000_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 64 + 8 = 72_{10}$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{167 + 130 + 72}{3} = \frac{369}{3} = 123.$$

Правильный ответ: 123.

(5 баллов)

Вопрос 6

Даны пять целых чисел, записанных в восьмеричной системе счисления: 230_8 , 232_8 , 234_8 , 236_8 , 240_8 . Сколько среди них чисел, которые больше, чем 90_{16} ?

Решение

Запишем число 90_{16} в восьмеричной системе счисления. Проще всего это сделать через двоичную систему счисления:

$$90_{16} \Rightarrow 10010000_2 \Rightarrow 220_8.$$

Сравниваем это число с исходным рядом. Видим, что оно меньше всех, т. е. все пять чисел больше, чем 90_{16} .

Правильный ответ: 5.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

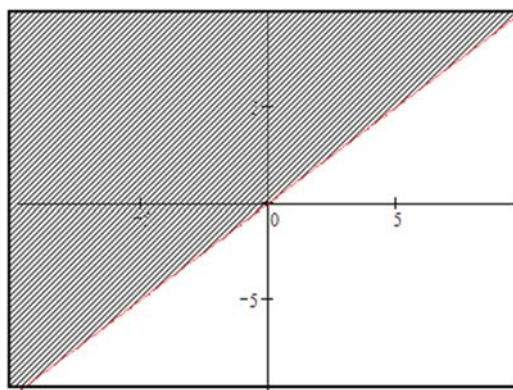
$$(2x + y \neq 78) \vee (x < y) \vee (A < x)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

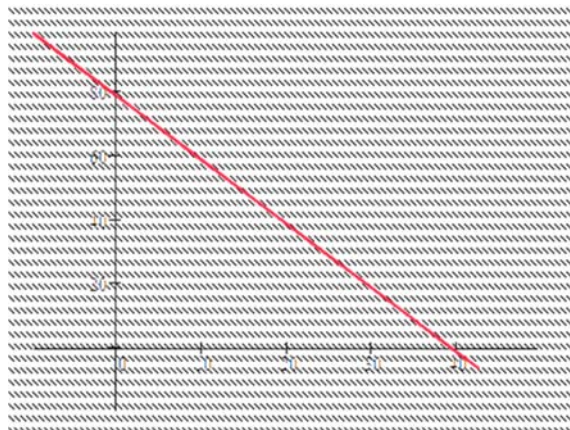
Решение

В данном выражении три события соединены операцией ИЛИ. Наступление любого из этих событий приведет к истинности всего выражения. Определим ту часть плоскости XU , на которой первые два события будут всегда ложны.

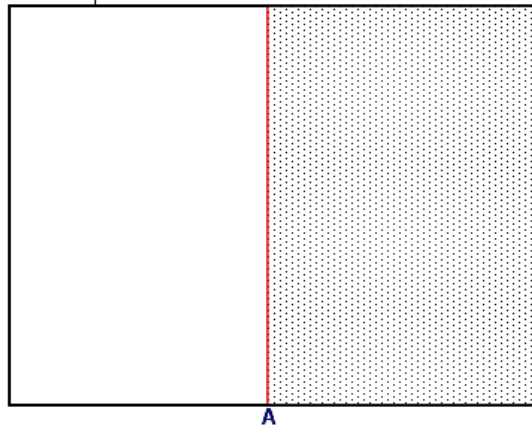
Выражение $x < y$ будет истинным для любой точки, которая лежит выше прямой $y = x$.



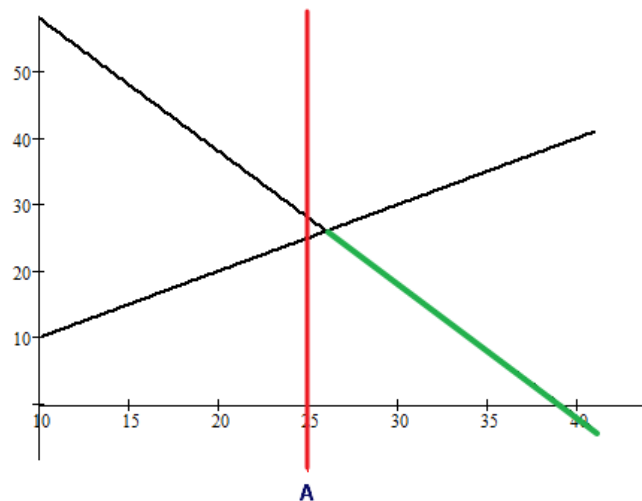
Первое выражение вернет «истину» на всей плоскости кроме точек, лежащих на прямой $y = 78 - 2x$.



Выражение $A < x$ будет истинным для всех точек, которые лежат справа от прямой $x = A$.



Таким образом, первые два выражения дадут нам ложь только в том случае, если точки будут лежать на прямой $y = 78 - 2x$ справа от прямой $y = x$ (зеленая линия). Необходимо переместить точку A в третьем выражении таким образом, чтобы эта часть прямой лежала от нее справа. Тогда при любых x и y исходное выражение всегда будет истинным.



Правильный ответ: 25.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения $\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C$.

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\overset{3}{\neg} \left(\overset{1}{\neg} A \overset{2}{\vee} B \right) \overset{5}{\vee} \overset{4}{\neg} C$$

A	B	C	1	2	3	4	F
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0

Правильный ответ: 10101110.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только четыре буквы: П, О, С, Т; для передачи используется двоичный код, допускающий однозначное декодирование. Для букв Т, О, П используются следующие кодовые слова: Т – 111, О – 0, П – 100.

Укажите кратчайшее кодовое слово для буквы С, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

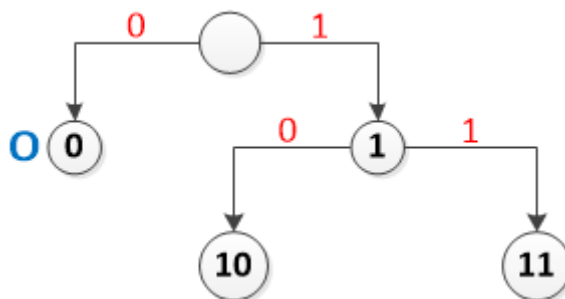
Решение

При построении кодовой таблицы важно помнить, что ни один код не может быть началом другого.

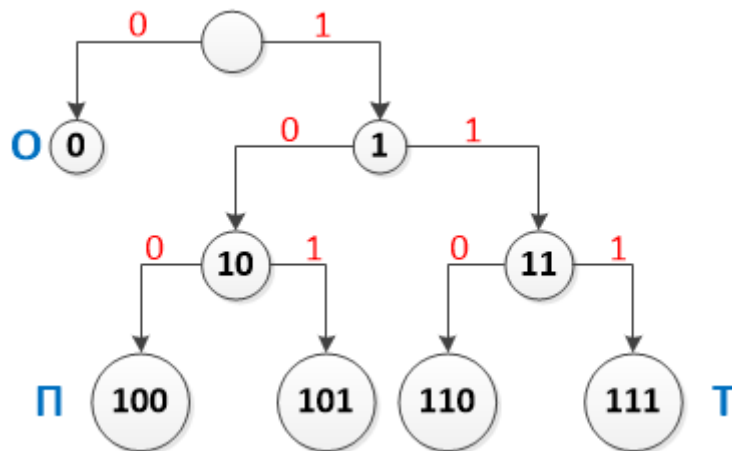
Начнем строить двоичное дерево кодов.



Самых коротких кодов (длиной в один символ) может быть только два: 0 и 1. По условию задачи код 0 закреплен за символом О. Поэтому дерево продолжаем строить только по правой ветке.



10 не можем использовать, т. к. это начало кода буквы П (100). С 11 начинается код буквы Т (111). Продолжаем строить дерево.



Получили четыре трехзначных кода. Два из них заняты: 100 (П) и 111 (Т).

Остается два кода, которые можно использовать для буквы С: 101 и 110.

Выбираем меньший из них по значению.

Правильный ответ: 101.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

Т	К	А	И	С
001	11	01	000	10

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 1001000000100011
- b) 0101101100101011
- c) 1101100100100011
- d) 1111101100110011

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, значит, процесс декодирования завершился некорректно.

Вариант а: 1001000000100011

Берем первый бит – 1. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 10. Новый код соответствует символу С. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая есть в таблице – 01, что соответствует символу А.

Получили: СА. Оставшийся код: 000000100011.

Продолжаем декодирование и в результате получим САИИСТ. Однако остался один символ, который никак не декодируется.

10	01	000	000	10	001	1
С	А	И	И	С	Т	?

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант b: 0101101100101011

01	01	10	11	001	01	01	1
А	А	С	К	Т	А	А	?

Вариант с: 1101100100100011

11	01	10	01	001	000	11
К	А	С	А	Т	И	К

Вариант d: 1111101100110011

11	11	10	11	001	10	01	1
К	К	С	К	Т	С	А	?

Правильный ответ: с.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

М	С	И	Е	О	П	Р	Н	А	К
000	001	010	0110	0111	111	110	100	1010	1011

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову ПРИМЕР.

- a) 1111100100000110110
- b) 001011010110101101010
- c) 11001110001010100001
- d) 00101011001101001010

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;

- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «ПРИМЕР». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

П	Р	И	М	Е	Р
111	110	010	000	0110	110

Правильный ответ: а.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1) прибавь 2,
- 2) умножь на 5.

Выполняя первую из них, Калькулятор прибавляет к числу на экране 2, а выполняя вторую – умножает его на 5.

Например, **2121** – это программа:

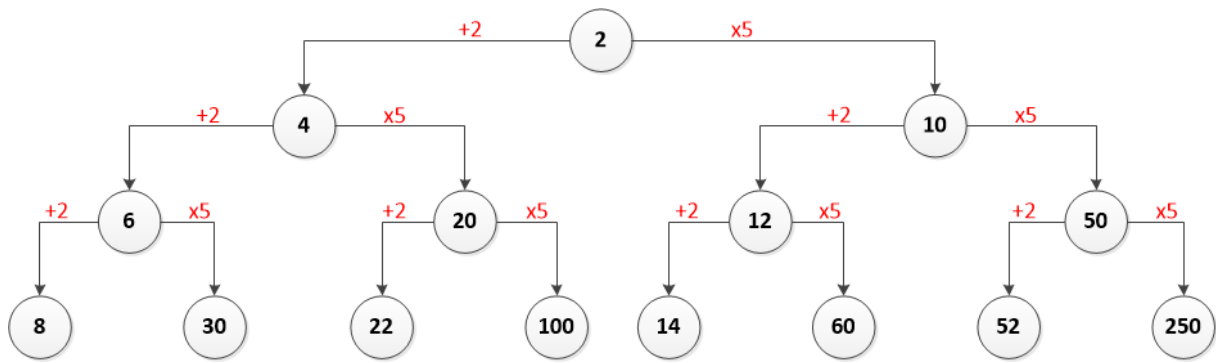
- умножь на 5,
- прибавь 2,
- умножь на 5,
- прибавь 2,

которая преобразует число 1 в число 37.

Запишите порядок команд в программе, которая преобразует число **2** в число **120** и содержит не более пяти команд. Указывайте лишь номера команд.

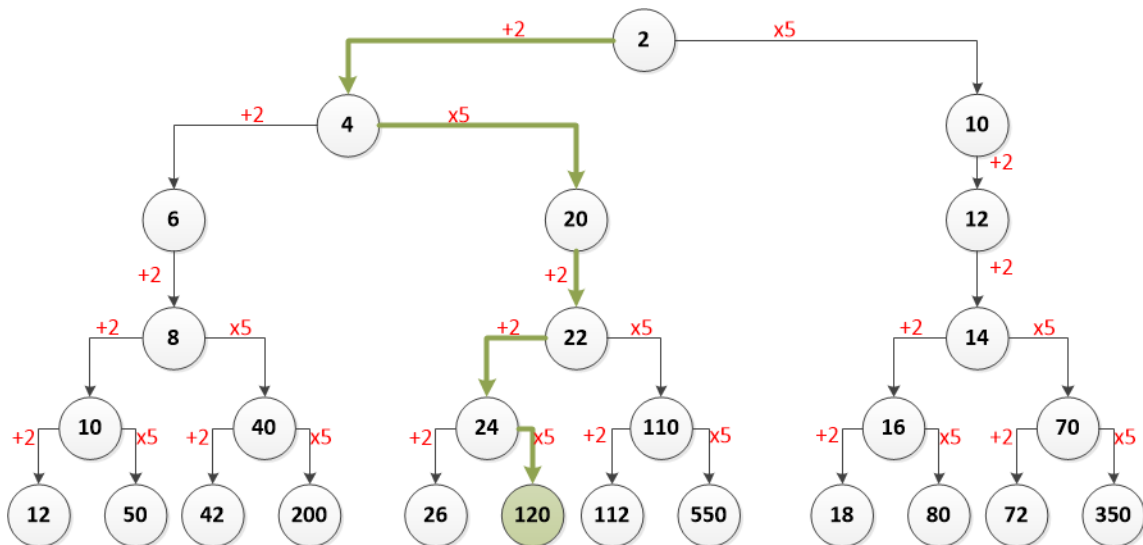
Решение

Так как команд всего две, можем составить бинарное дерево результатов.



Нижний ряд – это результат работы всех программ, состоящих из трех команд. Прежде чем строить дерево команд дальше, можно отбросить значение 250, т. к. оно уже больше, чем нужное нам (120). Также можно отбросить значения, которые при умножении на 5 дадут результат больше 120. Это числа: 30, 100, 60, 52.

Продолжаем строить дерево для оставшихся ветвей.



Ответ выделен зеленым.

Правильный ответ: 12112.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include<stdio.h> int main() { int s = 50, n = 1; while (s > 0) { s = s/4; n = n * 3; } printf("%d\n", n); return 0; }</pre>	<pre>s = 50 n = 1 while s > 0: s = s // 4 n = n * 3 print(n)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг нач цел s, n s := 50 n := 1 нц пока s > 0 s := div(s, 4) n := n * 3 кц вывод n кон</pre>	<pre>var s, n: integer; begin s := 50; n := 1; while s > 0 do begin s := s div 4; n := n * 3 end; writeln(n) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: s = 50
02: n = 1
03: while s > 0:
04:     s = s // 4
05:     n = n * 3
06: print(n)
```

Выполняем первую строку ($s = 50$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбец s записываем 50. Следующая команда присваивает n значение один. Проверяем условие $s > 0$, т. к. число пятьдесят больше нуля, то делим s нацело на 4 и записываем новое значение в таблицу. Умножаем n на три и также записываем в таблицу новое значение уже для n . Повторяем строки 3, 4 и 5 до тех пор, пока значение переменной s не станет равным нулю.

№	s	n
01	50	
02		1
04	12	
05		3
04	3	
05		9
04	0	27
06		27

Правильный ответ: 27.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include<stdio.h> long F(long x) { return 2*(x*x-16)*(x*x-16)+5; } int main() { long a, b, t, M, R; a = -20; b = 20; M = a; R = F(a); for (t=a; t<=b; t++) { if (F(t) <= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%ld", M+R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): return 2*(x*x-16)*(x*x-16)+5 a = -20; b = 20 M = a; R = F(a) for t in range(a,b+1): if (F(t) <= R): M = t; R = F(t) print (M+R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -20; b := 20 M := a; R := F(a) <u>нц для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) <= R <u>то</u> M := t; R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M+R <u>кон</u> <u>алг цел</u> F(цел x) <u>нач</u> <u>знач</u> := 2*(x*x-16)*(x*x-16)+5 <u>кон</u></pre>	<pre>var a, b, t, M, R :longint; function F(x: longint) : longint; begin F := 2*(x*x-16)*(x*x-16)+5; end; begin a := -20; b := 20; M := a; R := F(a); for t := a to b do begin if (F(t) <= R) then begin M := t; R := F(t) end end; write(M+R) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет 41 строка, что довольно много.

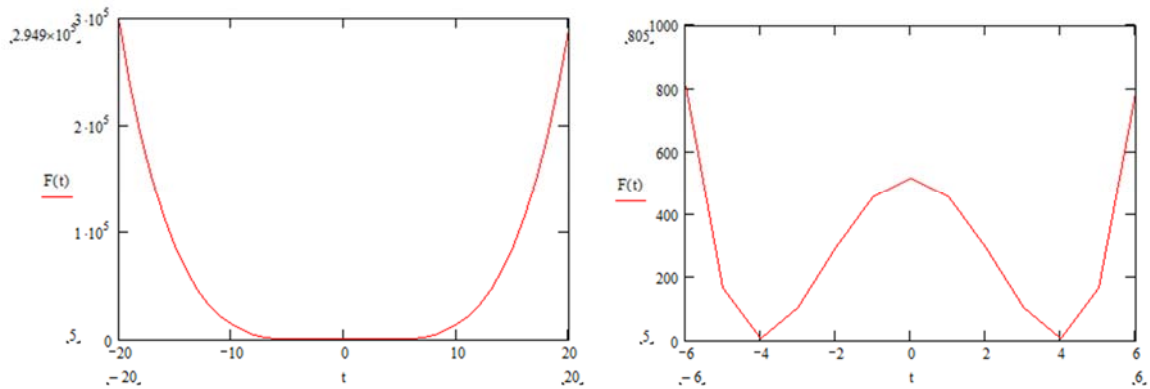
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -20 до $+20$ с шагом 1. Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \leq R,$$

где $F(t)$ – это значение функции при текущем значении переменной t , R – это значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется минимум функции. Построим график функции:

$$F(x) = 2 * (x * x - 16) * (x * x - 16) + 5.$$



Из графика видим, что минимум будет в двух точках $(-4, 5)$ и $(4, 5)$. Так как используется условие «меньше либо равно» (\leq) берем вторую точку, т. е. $M = 4$ и $R = 5$.

Правильный ответ: 9.

(5 баллов)

Вариант 2
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Сколько значащих нулей в двоичной записи десятичного числа 999_{10} ?

Решение

Переведем число из десятичной системы счисления в двоичную:

999	1
499	1
249	1
124	0
62	0
31	1
15	1
7	1
3	1
1	1

Получили десятиразрядное двоичное число 1111100111_2 , в котором всего два нуля.

Правильный ответ: 2.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $AC_{16} < N < 10110101_2$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления.

Составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Заменяем в числе AC_{16} каждую цифру ее двоичным эквивалентом:

$$1010\ 1100_2.$$

Вычтем из 10110101_2 полученное число.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Так как неравенство строгое, необходимо вычесть еще единицу. В результате получим: 1000_2 . Ответ запишем в десятичной форме.

Правильный ответ: 8.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $20321_5 + 315_6 - 77_8$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

$$20321_5 \Rightarrow 2 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 1250 + 75 + 10 + 1 = 1336_{10}$$

$$315_6 \Rightarrow 3 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 108 + 6 + 5 = 119_{10}$$

$$77_8 \Rightarrow 7 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 56 + 7 = 63_{10}$$

Подставляем в исходное выражение и вычисляем:

$$1336 + 119 - 63 = 1392.$$

Правильный ответ: 1392.

(5 баллов)

Вопрос 4

Значение арифметического выражения $25^{12} + 5^7 - 5$ записали в системе счисления с основанием 5. Сколько цифр 4 содержится в этой записи?

Решение

Запишем число 25 как 5^2 . Тогда 25^{12} можно записать в виде $(5^2)^{12} = 5^{24}$. В системе счисления с основанием 5 это будет выглядеть как единица и двадцать четыре нуля:

$$1000000000000000000000000_5.$$

Число 5^7 в системе счисления с основанием, равным пяти: 10000000_5 . Сложим его с предыдущим числом и получим:

$$10000000000000000000000010000000_5.$$

Вычитаем из полученного числа $5^1 = 10_3$.

Вопрос 6

Даны пять целых чисел, записанных в шестнадцатеричной системе счисления: $B5_{16}$, $B7_{16}$, $B9_{16}$, BB_{16} , BD_{16} , BF_{16} , $C1_{16}$, $C3_{16}$, $C5_{16}$, $C7_{16}$, $C9_{16}$. Сколько среди них чисел, которые больше, чем 272_8 ?

Решение

Запишем число 272_8 в шестнадцатеричной системе счисления. Проще всего это сделать через двоичную систему счисления:

$$272_8 \Rightarrow 01011\ 1010_2 \Rightarrow BA_{16}.$$

Сравниваем это число с исходным рядом. Видим, что оно располагается между числами $B9_{16}$ и BB_{16} , т. е. справа от BA_{16} лежит восемь чисел.

Правильный ответ: 8.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

Сколько существует целых значений X , при которых истинно высказывание:

$$(|X| > 10) \wedge (|X| > 1) \wedge (|X| \leq 5)?$$

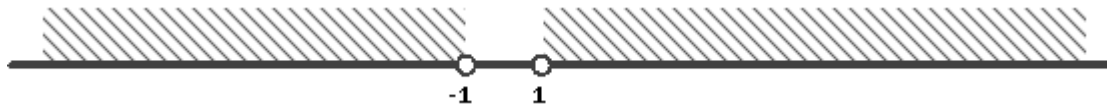
Решение

Разберем каждое выражение в скобках и определим, при каких значениях переменной X они будут истинными.

Выражение в первых скобках будет истинно при $X \in (-\infty, -10)$ или $X \in (10, \infty)$, Однако перед скобкой стоит знак отрицания. Поэтому истинность первого выражения будет достигнута при любом $X \in [-10, 10]$.



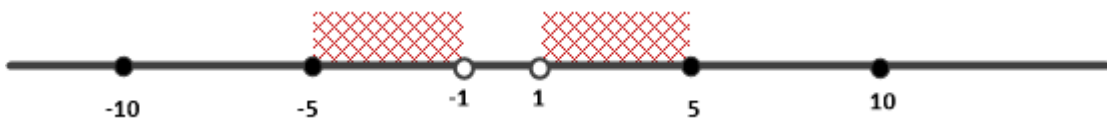
Второе выражение будет истинно при любом X из интервалов $(-\infty, -1)$ или $(1, \infty)$.



Третье выражение принимает истинное значение при $X \in [-5, 5]$.



Все выражения объединены логической операцией И. Следовательно, все выражение возвращает «истину», когда все выражения в скобках истинны. Найдём пересечение диапазонов.



На интервале $[-5, -1)$ четыре точки, которые удовлетворяют условиям. Аналогичное их количество и на интервале $(1, 5]$. Соответственно всего целых значений X , при которых все выражение будет истинно – восемь.

Правильный ответ: 8.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vee A.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(\left(A \overset{1}{\rightarrow} B \right) \overset{2}{\rightarrow} C \right) \overset{3}{\vee} A.$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Правильный ответ: 01011111.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

Для кодирования букв Т, С, Р, О решили использовать двухразрядные последовательные двоичные числа (от 00 до 11 соответственно). Если таким способом закодировать последовательность символов РОСТ и записать результат шестнадцатеричным кодом, то какое число получится?

Решение

Запишем для каждой буквы ее код:

Т – 00, С – 01, Р – 10, О – 11.

Теперь в слове РОСТ заменим каждый символ его двоичным кодом:

Р	О	С	Т
10	11	01	00

Перейдем от двоичного кода 10110100 к шестнадцатеричному:

1011 0100 → В4.

Правильный ответ: В4.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

С	Л	К	Е	О
001	11	01	000	10

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 00101100000011
- b) 01101100000110
- c) 01101011000110
- d) 01101110000110

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, значит, процесс декодирования завершился некорректно.

Вариант а: 00101100000011

Берем первый бит – 0. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 00. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 001. Новый код соответствует символу С. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая представлена в таблице – 01, что соответствует символу К.

Получили: СК. Оставшийся код: 100000011.

Продолжаем декодирование и в результате получим СКОЕС. Однако остался один символ, который никак не декодируется.

001	01	10	000	001	1
С	К	О	Е	С	?

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант b: 01101100000110

01	10	11	000	001	10
К	О	Л	Е	С	О

Вариант с: 01101011000110

01	10	10	11	000	11	0
К	О	О	Л	Е	Л	?

Вариант d: 01101110000110

01	10	11	10	000	11	0
К	О	Л	О	Е	Л	?

Правильный ответ: b.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице.

М	С	И	Е	О	П	Р	Н	А	К
000	001	010	0110	0111	111	110	100	1010	1011

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову СКРОМНИК.

- a) 001101101111101110100111100
- b) 110101000110110111111011010
- c) 110101000111101000110111010
- d) 001011100010001101000100110
- e) 001101111001110001000101011

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «СКРОМНИК». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

С	К	Р	О	М	Н	И	К
001	1011	110	0111	000	100	010	1011

Правильный ответ: е.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает ее. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах v и w обозначают цепочки цифр.

А) **заменить** (v, w).

Эта команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки v на цепочку w . Например, выполнение команды **заменить** (111, 27) преобразует строку 05111150 в строку 0527150.

Если в строке нет вхождений цепочки v , то выполнение команды **заменить** (v, w) не меняет эту строку.

Б) **нашлось** (v).

Эта команда проверяет, встречается ли цепочка v в строке исполнителя Редактор. Если она встречается, то команда возвращает логическое значение «истина», в противном случае возвращает значение «ложь». Строка исполнителя при этом не изменяется.

Цикл

ПОКА *условие*

последовательность команд

КОНЕЦ ПОКА

выполняется, пока условие истинно.

В конструкции

ЕСЛИ *условие*

ТО *команда1*

ИНАЧЕ *команда2*

КОНЕЦ ЕСЛИ

выполняется *команда1* (если условие истинно) или *команда2* (если условие ложно).

Ниже приведена программа для исполнителя Редактор.

НАЧАЛО

ПОКА **нашлось** (18) ИЛИ **нашлось** (288) ИЛИ **нашлось** (3888)

заменить (18, 2)

заменить (288, 3)

заменить (3888, 1)

КОНЕЦ ПОКА

КОНЕЦ

На вход этой программе подается строка длины 125, состоящая из цифры 1, за которой следуют 124 идущих подряд цифры 8. Какая строка получится в результате применения программы к этой строке? В ответе запишите полученную строку.

Решение

Изначально строка выглядит следующим образом: 188888888...8888. После команды **заменить** (18, 2) количество восьмерок станет меньше на одну, а начале строки появится двойка.

После выполнения следующей команды **заменить** (288, 3) количество восьмерок сократится еще на две и первой встанет цифра 3.

Третья команда **заменить** (3888, 1) удалит из строки еще три восьмерки и вернет на первую позицию единицу. Таким образом, строка станет выглядеть, как и исходная, но с меньшим количеством восьмерок.

Получается, что за одну итерацию цикла строка уменьшается на шесть восьмерок. Соответственно, за 20 итераций строка будет выглядеть следующим образом: 18888.

На 21-й итерации получим:

<i>Команда</i>	<i>Строка</i>
заменить (18, 2)	2888
заменить (288, 3)	38
заменить (3888, 1)	38

Правильный ответ: 38.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <iostream> using namespace std; int main() { int s = 100, n = 200; while (s + n <= 600) { s = s + 40; n = n - 20; } cout << s; return 0; }</pre>	<pre>s = 100 n = 200 while s + n <= 600: s = s + 40 n = n - 20 print(s)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг нач цел s, n s := 100 n := 200 нц пока s + n <= 600 s := s + 40 n := n - 20 кц вывод s кон</pre>	<pre>var s, n: integer; begin s := 100; n := 200; while s + n <= 600 do begin s := s + 40; n := n - 20; end; writeln(s) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: s = 100
02: n = 200
03: while s + n <= 600:
04:     s = s + 40
05:     n = n - 20
06: print(s)
```

Выполняем первую строку ($s = 100$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбец s записываем 100. Следующая команда присваивает n значение 200. Проверяем условие $s + n \leq 600$, т. к. число $100 + 200 = 300$ меньше 600, то увеличиваем s на 40 и записываем новое значение в таблицу. Уменьшаем n на двадцать и также записываем в таблицу новое значение уже для n . Повторяем строки 3, 4 и 5 до тех пор, пока сумма $s + n$ не станет равной нулю.

№	s	n	№	s	n
01	100		04	460	
02		200	05		20
04	140		04	500	
05		180	05		0
04	180		04	540	
05		160	05		-20
04	220		04	580	
05		140	05		-40
04	260		04	620	
05		120	05		-60
04	300		04	660	
05		100	05		-80
04	340		04	700	
05		80	05		-100
04	380		04	740	
05		60	05		-120
04	420				
05		40			

Правильный ответ: 740.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include<stdio.h> long F(long x) { return 2(abs(abs(x-6) + abs(x + 6)-16) + 2); } int main() { long a, b, t, M, R; a = -20; b = 20; M = a; R = F(a); for (t=a; t<=b; t + +) { if (F(t) <= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%ld", M + R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): return abs(abs(x-6) + abs(x + 6)-16) + 2 a = -20 b = 20 M = a R = F(a) for t in range(a, b + 1): if F(t) <= R: M = t R = F(t) print(M + R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -20; b := 20 M := a; R := F(a) <u>нц для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) <= R <u>то</u> M := t; R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M + R <u>кон</u> <u>алг цел</u> F(цел x) <u>нач</u> <u>знач</u> := (abs(abs(x-6) + abs(x + 6)-16) + 2) <u>кон</u></pre>	<pre>var a, b, t, M, R :longint; function F(x: longint) : longint; begin F := (abs(abs(x-6) + abs(x + 6)-16) + 2); end; begin a := -20; b := 20; M := a; R := F(a); for t := a to b do begin if (F(t) <= R) then begin M := t; R := F(t) end end; write(M + R) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет довольно много строк.

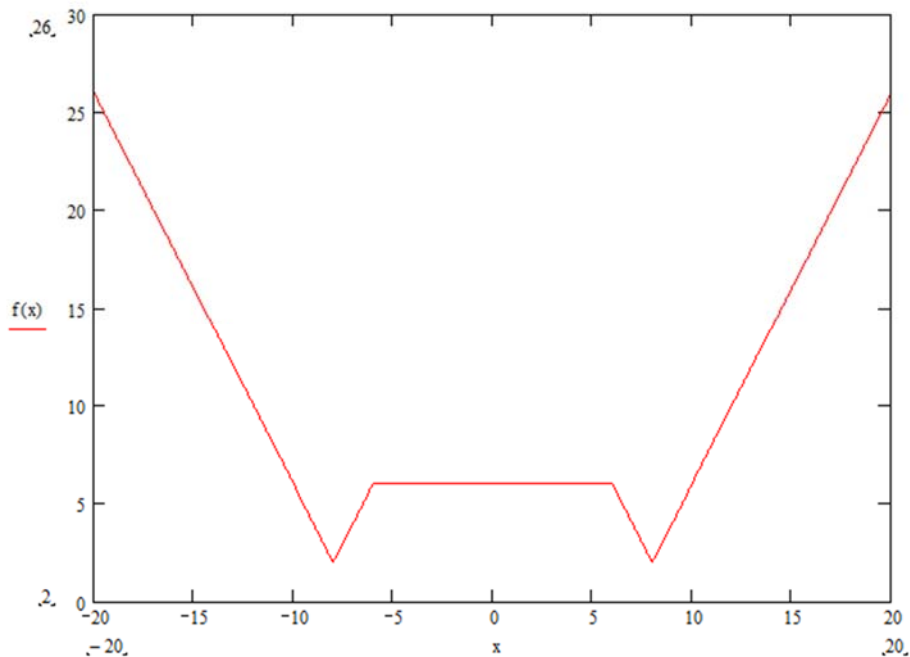
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -20 до $+20$ с шагом 1 . Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \leq R,$$

где $F(t)$ – это значение функции при текущем значении переменной t , R – это значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется минимум функции. Построим график функции:

$$F(x) = \text{abs}(\text{abs}(x-6) + \text{abs}(x+6) - 16) + 2.$$



Из графика видим, что минимум будет в двух точках $(-8, 2)$ и $(8, 2)$. Так как используется условие «меньше либо равно» (\leq), берем вторую точку, т. е. $M = 8$ и $R = 2$. На экран выводится сумма этих значений.

Правильный ответ: 10.

(5 баллов)

Вариант 3
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Сколько значащих нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $FF22_{16}$?

Составим таблицу соответствия записи первых пятнадцати чисел в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	F
15	1111	E

Заменяем в числе $FF22_{16}$ каждую цифру ее двоичным эквивалентом из таблицы:

$1111\ 1111\ 0010\ 0010_2$.

Считаем количество нулей.

Правильный ответ: 6.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $3A_{16} < N < 1001_4$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления.

Составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная	Двоичная	Четверичная
0	0000	0	00	0
1	0001	1	01	1
2	0010	2	10	2
3	0011	3	11	3
4	0100	4		
5	0101	5		
6	0110	6		
7	0111	7		
8	1000	8		
9	1001	9		
10	1010	A		
11	1011	B		
12	1100	C		
13	1101	D		
14	1110	F		
15	1111	E		

Заменяем в числе $3A_{16}$ каждую цифру ее двоичным эквивалентом и перейдем к системе счисления с основанием четыре:

$$0011\ 1010_2 \rightarrow 0322_4.$$

Вычтем из 1001_2 полученное число.

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 3 & 2 & 2 \\
 \hline
 & & 1 & 3
 \end{array}$$

Так как неравенство строгое, необходимо вычесть еще единицу. В результате получим: 12_4 .

Правильный ответ: 6.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $2021_4 + 31_7 - 77_9$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

$$2021_4 \Rightarrow 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 128 + 8 + 1 = 137_{10}$$

$$31_7 \Rightarrow 3 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 21 + 1 = 22_{10}$$

$$77_9 \Rightarrow 7 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0 = 63 + 7 = 70_{10}$$

Подставляем в исходное выражение и вычисляем:

$$137 + 22 - 70 = 89.$$

Правильный ответ: 89.

(5 баллов)

Вопрос 4

Значение арифметического выражения $49^{11} + 7^7 - 7$ записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр 6 содержится в этой записи?

Решение

Число 49^{11} можно записать как 7^{22} . В системе счисления с основанием 7 это будет выглядеть как единица и двадцать два нуля:

$$1000000000000000000000_7.$$

Число 7^7 в системе счисления с основанием 7: 10000000_7 . Сложим его с предыдущим числом и получим:

$$1000000000000000010000000_7.$$

Вычитаем 10_7 .

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 0 \end{array}$$

Считаем количество шестерок в результате.

Правильный ответ: 6.

(5 баллов)

Вопрос 5

Найдите среднее арифметическое чисел 241_8 , 85_{16} и 1001011_2 . Ответ представьте в десятичной системе счисления.

Решение

Среднее арифметическое трех чисел определяется по формуле:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Чтобы сложить три числа, нужно представить их в одной системе счисления. Поскольку ответ необходимо дать в десятичной системе счисления, запишем все исходные данные в ней.

$$241_8 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 128 + 32 + 7 = 161_{10}$$

$$85_{16} = 8 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 128 + 5 = 133_{10}$$

$$1001011_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 2 + 1 = 75_{10}$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{161 + 133 + 75}{3} = \frac{369}{3} = 123.$$

Правильный ответ: 123.

(5 баллов)

Вопрос 6

Даны пять целых чисел, записанных в шестнадцатеричной системе счисления: $B5_{16}$, $B7_{16}$, $B9_{16}$, BB_{16} , BD_{16} , BF_{16} , $C1_{16}$, $C3_{16}$, $C5_{16}$, $C7_{16}$, $C9_{16}$. Сколько среди них чисел, которые меньше, чем 302_8 ?

Решение

Запишем число 302_8 в шестнадцатеричной системе счисления. Проще всего это сделать через двоичную систему счисления.

$$302_8 \Rightarrow 011\ 00\ 0\ 010_2 \Rightarrow C2_{16}$$

Сравниваем это число с исходным рядом. Видим, что оно расположено между числами $C1_{16}$ и $C3_{16}$. Соответственно, чисел, которые меньше, чем 302_8 , будет ровно семь.

Правильный ответ: 7.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

A , B и C – целые числа, для которых истинно высказывание:

$$(A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (C = B)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C = A)).$$

Чему равно B , если $A = 65$ и $C = 25$?

Решение

В данном выражении три операнда соединены операцией И. Так как все выражение истинно, то и каждый операнд равен «истине». Рассмотрим выражение $(A = B)$. Из него следует, что числа A и B не равны.

Теперь посмотрим третий операнд:

$$(B > A) \rightarrow (C = A).$$

Запишем таблицу истинности.

$B > A$	$C = A$	$(B > A) \rightarrow (C = A)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Значения C и A не равны по условию задачи, значит, из таблицы нужно убрать две строки.

$B > A$	$C = A$	$(B > A) \rightarrow (C = A)$
0	0	1
1	0	0

Результат, который дает ложь, нас не интересует.

$B > A$	$C = A$	$(B > A) \rightarrow (C = A)$
0	0	1

Отсюда следует, что условие $B > A$ ложно, т. е. B меньше либо равно A . Но ранее мы уже выяснили, что они не равны, поэтому имеется строгое неравенство:

$$B < A.$$

Аналогичным образом рассмотрим второй операнд: $(A > B) \rightarrow (C = B)$.

$A > B$	$C = B$	$(A > B) \rightarrow (C = B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Мы уже выяснили, что B строго меньше A .

$A > B$	$C = B$	$(A > B) \rightarrow (C = B)$
1	0	0
1	1	1

Результат, который дает ложь нас не интересует.

$A > B$	$C = B$	$(A > B) \rightarrow (C = B)$
1	1	1

Получается, что $B = C = 25$. Проверяем:

$$(A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (C = B)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C = A)).$$

$$(65 = 25) \wedge ((65 > 25) \rightarrow (25 = 25)) \wedge ((25 > 65) \rightarrow (25 = 65)).$$

$$\text{ЛОЖЬ} \wedge (\text{ИСТИНА} \rightarrow \text{ИСТИНА}) \wedge (\text{ЛОЖЬ} \rightarrow \text{ЛОЖЬ})$$

$$\text{ИСТИНА} \wedge \text{ИСТИНА} \wedge \text{ИСТИНА}$$

$$\text{ИСТИНА}$$

Правильный ответ: 25.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vee C.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(\left(A \overset{1}{\rightarrow} B \right) \overset{2}{\rightarrow} C \right) \overset{3}{\vee} C.$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Правильный ответ: 01011101.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

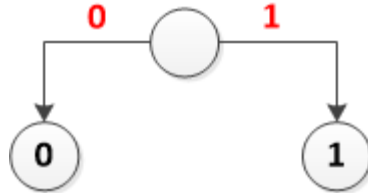
По каналу связи передаются сообщения, содержащие только пять букв: А, В, С, D, Е. Для передачи используется двоичный код, допускающий однозначное декодирование. Для букв А, В, С используются следующие кодовые слова: А – 00, В – 11, С – 10, D – 010.

Укажите кратчайшее кодовое слово для буквы Е, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

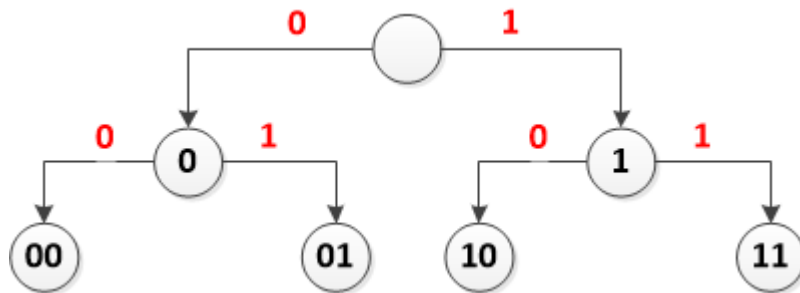
Решение

При построении кодовой таблицы важно помнить, что ни один код не может быть началом другого.

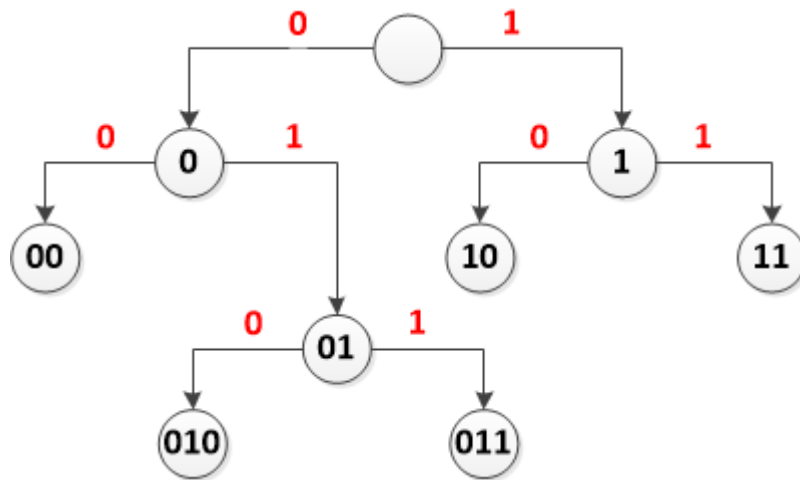
Начнем строить двоичное дерево кодов.



Самых коротких кодов (длиной в один символ) может быть только два: 0 и 1. По условию задачи с нуля начинаются коды символов А и D, а с единицы – В и С. Поэтому строим дерево далее.



Коды 00, 10, 11 используются для букв А, С, В соответственно. Продолжаем строить дерево по ветке 01.



Код 010 занят для символа D. Остается код 011.

Правильный ответ: 011.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

П	Л	Т	Е	А
001	11	01	000	10

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 0011011100010
- b) 1110011100100
- c) 0011011100110
- d) 0011011100000

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, следовательно, процесс декодирования завершился некорректно.

Вариант а: 0011011100010

Берем первый бит – 0. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 00. Снова смотрим таблицу. Не находим соответствующего кода и добавляем еще один бит. Коду 001 соответствует буква П. Записываем его и ищем следующий код – 10, что соответствует символу А. Продолжаем декодирование, пока не расшифруем весь текст.

001	10	11	10	001	0
П	А	Л	А	П	?

В результате получим ПАЛАП. Однако остался один символ, который никак не декодируется. Значит, этот вариант не подходит.

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант б: 1110011100100

11	10	01	11	001	00
Л	А	Т	Л	П	?

Вариант с: 0011011100110

001	10	11	10	01	10
П	А	Л	А	Т	А

Вариант d: 0011011100000

001	10	11	10	001	0
П	А	Л	А	П	?

Правильный ответ: с.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

М	С	И	Е	О	П	Р	Н	А	К
000	001	010	0110	0111	111	110	100	1010	1011

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову РАСПИСКА.

- a) 001101101111101110100111100
- b) 110101000110110111111011010
- c) 110101000111101000110111010
- d) 001011100010001101000100110
- e) 001101111001110001000101011

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «РАСПИСКА». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

Р	А	С	П	И	С	К	А
110	1010	001	111	010	001	1011	1010

Правильный ответ: с.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

Исполнитель Чертежник перемещается на координатной плоскости, оставляя след в виде линии. Чертежник может выполнять команду **Сместиться_на** (a, b) (где a, b – целые числа), перемещающую Чертежника из точки с координатами (x, y) в точку с координатами $(x + a, y + b)$. Если числа a, b положительные, значение соответствующей координаты увеличивается; если отрицательные – уменьшается.

*Например, если Чертежник находится в точке с координатами $(4, 2)$, то команда **Сместиться_на** $(2, -3)$ переместит Чертежника в точку $(6, -1)$.*

Запись

Повтори k раз

Команда1 Команда2 Команда3

Конец

означает, что последовательность команд *Команда1 Команда2 Команда3* повторится k раз.

Чертежнику был дан для исполнения следующий алгоритм:

Повтори 7 раз

Сместиться_на $(1, 1)$ Сместиться_на $(-1, 4)$ Сместиться_на $(2, -5)$

Конец

Координаты точки, с которой Чертежник начинал движение: $(2, 5)$. Каковы координаты точки, в которой он оказался?

Решение

За одну итерацию цикла Чертежник сдвинется по координате по горизонтали на $1 - 1 + 2 = 2$ точек и вертикали на $1 + 4 - 5 = 0$ точек. Соответственно, за семь итераций он сдвинется по горизонтали на 14 и вертикали 0 точек. Координаты точки, в которой окажется чертежник: $2 + 14 = 16$, $5 + 0 = 5$.

Ответ ввести два целых числа, разделенных запятой, в круглых скобках, например, (0, 0).

Правильный ответ: (16, 5).

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <iostream> using namespace std; int main() { int s, k; s = 0, k = 1; while (s < 80) { s = s + 2*k; k = k + 4; } cout << s << endl; return 0; }</pre>	<pre>s = 0 k = 1 while s < 80: s += 2*k k += 4 print(s)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг нач цел k, s s := 0 k := 1 нц пока s < 80 s := s + 2*k k := k + 4 кц ВЫВОД s КОН</pre>	<pre>var k, s: integer; begin s:=0; k:=1; while s < 80 do begin s:=s + 2*k; k:=k + 4; end; write(s); end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: s = 0
02: k = 1
03: while s < 80:
04:     s += 2*k
05:     k += 4
06: print(s)
```

Выполняем первую строку ($s = 0$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбец s записываем 0. Следующая команда присваивает k значение один. Проверяем условие $s < 0$, т. к. нуль меньше 80, то увеличиваем s на $2k$ и записываем новое значение в таблицу. Увеличиваем k на 4 и также записываем в таблицу новое значение уже для k . Повторяем строки 3, 4 и 5 до тех пор, пока значение переменной s не станет больше или равным 80.

№	s	k
01	0	
02		1
04	2	
05		5
04	12	
05		9
04	30	
05		13
04	56	
05		17
04	90	
05		21
06	90	

Правильный ответ: 90.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include<stdio.h> long F(long x) { return 2*x*x-10*abs(x) + 10; } int main() { long a, b, t, M, R; a = -10; b = 10; M = a; R = F(a); for (t=a; t<=b; t + +) { if (F(t) < R) { M = t; R = F(t); } } printf("%ld", M + 43); return 0; }</pre>	<pre>def f(x): return 2*x*x-10*abs(x) + 10 a = -10 b = 10 M = a R = f(a) for t in range(a, b + 1): if (f(t) < R): M = t R = f(t); print(M + 43)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -10; b := 10 M := a; R := F(a) <u>нц для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) < R <u>то</u> M := t; R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M + 43 <u>кон</u> <u>алг цел</u> F(<u>цел</u> x) <u>нач</u> <u>знач</u> := 2*x*x-10*abs(x) + 10 <u>кон</u></pre>	<pre>var a, b, t, M, R :longint; function F(x: longint) : longint; begin F := 2*x*x-10*abs(x) + 10; end; begin a := -10; b := 10; M := a; R := F(a); for t := a to b do begin if (F(t) < R) then begin M := t; R := F(t) end end; write(M + 43) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет 40 строк, что довольно много.

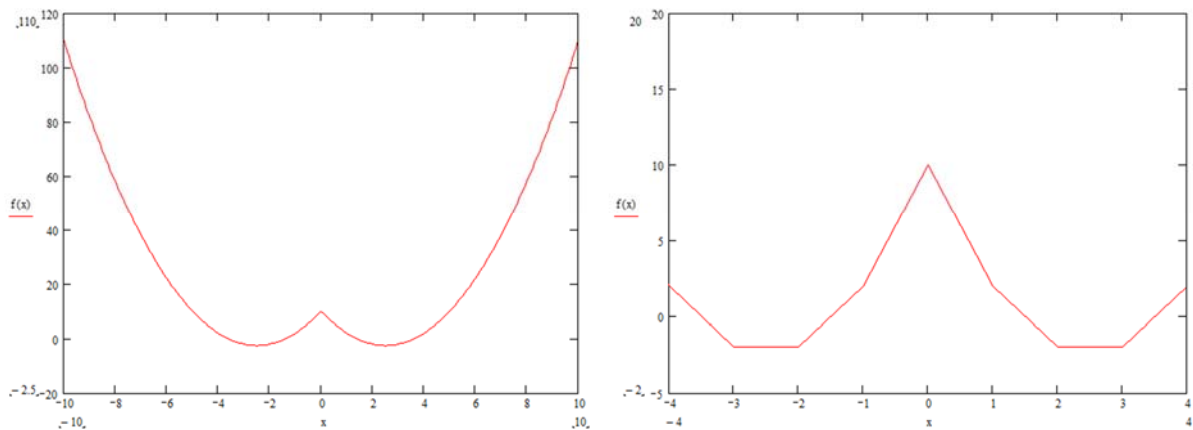
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -10 до $+10$ с шагом 1 . Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) < R,$$

где $F(t)$ – это значение функции при текущем значении переменной t , R – это значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется минимум функции. Построим график функции:

$$F(x) = 2 * x * x - 10 * \text{abs}(x) + 10.$$



Из графика видим, что минимум будет в четырех точках $(-3, -2)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$ и $(3, -2)$. Так как используется условие строго меньше ($<$), берем первую точку, т. е. $M = -3$ и $R = -2$. На экран выведется сумма $M + 43 = 40$.

Правильный ответ: 40.

(5 баллов)

Вариант 4
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа 999_{10} ?

Решение

Переведем число 999 из десятичной в двоичную систему счисления.

999	1
499	1
249	1
124	0
62	0
31	1
15	1
7	1
3	1
1	1

Запишем результат $999_{10} \rightarrow 1111100111_2$. Подсчитаем количество единиц.

Правильный ответ: 8.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $11000110_2 < N < 11001001_2$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Оба числа записаны в одной системе счисления. Поэтому достаточно вычесть из большего числа меньшее.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Так как неравенство строгое, необходимо вычесть еще единицу. В результате получим: 10_2 .

Правильный ответ: 2.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $2025_9 + 2025_7 - 2023_4$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

$$2023_4 \Rightarrow 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 128 + 8 + 3 = 139_{10}$$

$$2025_7 \Rightarrow 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 686 + 14 + 5 = 705_{10}$$

$$2025_9 \Rightarrow 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^1 + 5 \cdot 9^0 = 1458 + 18 + 5 = 1481_{10}$$

Подставляем в исходное выражение и вычисляем:

$$1481 + 705 - 139 = 2047.$$

Правильный ответ: 2047.

(5 баллов)

Вопрос 4

Значение арифметического выражения $25^7 + 5^6 - 5$ записали в системе счисления с основанием 5. Сколько цифр 4 содержится в этой записи?

Решение

Число 25^7 можно записать как 5^{14} . В системе счисления с основанием 5, это будет выглядеть как единица и четырнадцать нулей:

$$100000000000000_5.$$

Число 5^6 в системе счисления с основанием 5: 1000000_5 . Сложим его с предыдущим числом и получим:

$$100000001000000_5.$$

Вычитаем 10_5 .

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 0 \end{array}$$

Считаем количество четверок в результате.

Правильный ответ: 5.

(5 баллов)

Вопрос 5

Найдите среднее арифметическое чисел 244_8 , 85_{16} и 1001011_2 . Ответ представьте в десятичной системе счисления.

Решение

Среднее арифметическое трех чисел определяется по формуле:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Чтобы сложить три числа, нужно представить их в одной системе счисления. Поскольку ответ необходимо дать в десятичной системе счисления, запишем все исходные данные в ней.

$$244_8 = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 128 + 32 + 4 = 164_{10}$$

$$85_{16} = 8 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 133_{10}$$

$$1001011_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 2 + 1 = 75_{10}$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{164 + 133 + 75}{3} = \frac{369}{3} = 123.$$

Правильный ответ: 123.

(5 баллов)

Вопрос 6

Даны пять целых чисел, записанных в восьмеричной системе счисления: 136_8 , 140_8 , 142_8 , 144_8 , 146_8 . Сколько среди них чисел, которые больше, чем 65_{16} ?

Решение

Запишем число 65_{16} в восьмеричной системе счисления. Проще всего это сделать через двоичную систему счисления.

$$65_{16} \Rightarrow 01100101_2 \Rightarrow 145_8.$$

Сравниваем это число с исходным рядом. Видим, что оно располагается между числами 144_8 и 146_8 . Справа от числа 65_{16} находится только одно число.

Правильный ответ: 1.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [15; 40]$ и $Q = [21; 63]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , для которого логическое выражение

$$(x \in P) \rightarrow \left(((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P) \right)$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x .

Решение

Чтобы упростить выражение, введем следующие обозначения:

$$P_x = x \in P, \quad Q_x = x \in Q, \quad A_x = x \in A.$$

В этом случае логическое выражение можно записать следующим образом:

$$P_x \rightarrow \left((Q_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg P_x \right).$$

В выражение входит пять логических операций. Последней будет выполняться импликация. Запишем таблицу истинности для этой операции.

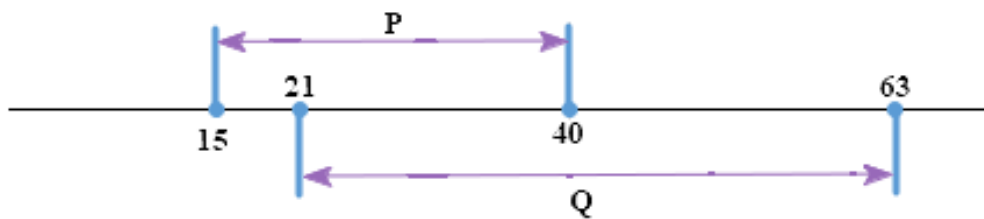
P_x	$(Q_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg P_x$	\rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Как видно из таблицы, если точка x лежит вне диапазона $P = [15; 40]$, то результат будет всегда «истина». Внутри этого диапазона результат всего выражения будет «ложь», если операнд $(Q_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg P_x$ также «ложь». Здесь аналогично последней операцией будет выполнена импликация.

$Q_x \wedge \neg A_x$	$\neg P_x$	\rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Обращаем внимание, что мы рассматриваем вариант, при котором точка попадает в интервал P . В этом случае $\neg P_x$ равно «ложь». Следовательно, результат всего выражения будет ложным при истинности операнда $(Q_x \wedge \neg A_x)$.

В этом случае «истина» будет достигаться при истинности Q_x (это отрезок $[21, 40]$) и одновременной истинности $\neg A_x$.



Другими словами, если разместить отрезок A вне интервала $[21, 40]$, то для значений x на данном отрезке все выражение будет ложным. Следовательно, размещаем отрезок A в данных границах.

Длина отрезка A в данном случае равна 19 ($40 - 21$).

Правильный ответ: 19.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения:

$$(A \rightarrow B) \vee \neg C.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(A \overset{1}{\rightarrow} B \right) \overset{3}{\vee} \overset{2}{\neg} C.$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Правильный ответ: 11111011.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

По каналу связи передаются зашифрованные сообщения, содержащие только пять букв: A , B , C , D , E ; для передачи используется неравномерный двоичный код. Для кодирования букв используются кодовые слова.

A	0
B	?
C	100
D	1011
E	1010

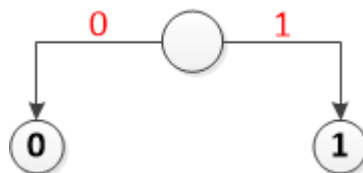
Укажите кратчайшее кодовое слово для буквы B , при котором код удовлетворяет условию Фано. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

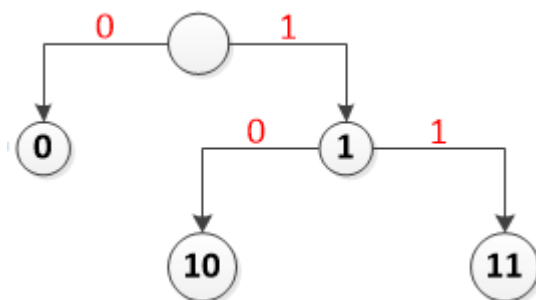
Решение

При построении кодовой таблицы важно помнить, что ни один код не может быть началом другого.

Начнем строить двоичное дерево кодов.



Самых коротких кодов (длиной в один символ) может быть только два: 0 и 1. По условию задачи код 0 закреплен за символом A . Поэтому дерево продолжаем строить только по правой ветке.



10 не можем использовать, т. к. это начало кода букв *C* (100), *D* (1011) и *E* (1010). С 11 ни один с известных кодов не начинается. Других символов без кода кроме *B* в словаре не осталось. Значит, можем для *B* взять код 11.

Правильный ответ: 11.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

Т	К	А	И	С
001	11	01	000	10

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 01011110000100011
- b) 10111100001000110
- c) 00101111000010001
- d) 01011110000100010

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, следовательно, процесс декодирования завершился некорректно.

Вариант а: 01011110000100011

Берем первый бит – 0. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 01. Новый код соответствует символу А. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая представлена в таблице: снова 01, что соответствует символу А.

Получили: АА. Оставшийся код: 1110000100011.

Продолжаем декодирование и в результате получим ААКСИСТ. Однако остался один символ, который никак не декодируется.

01	01	11	10	000	10	001	1
А	А	К	С	И	С	Т	?

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант b: 10111100001000110

10	11	11	000	01	000	11	0
С	К	К	И	А	И	К	?

Вариант с: 00101111000010001

001	01	11	10	000	10	001
Т	А	К	С	И	С	Т

Вариант d: 01011110000100010

01	01	11	10	000	10	001	0
А	А	К	С	И	С	Т	?

Правильный ответ: с.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

М	С	И	Е	О	П	Р	Н	А	К
000	001	010	0110	0111	111	110	100	1010	1011

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову «СКОРПИОН».

- a) 001101101111101110100111100
- b) 110101000110110111111011010
- c) 110101000111101000110111010
- d) 001011100010001101000100110
- e) 001101111001110001000101011

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «СКОРПИОН». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

С	К	О	Р	П	И	О	Н
001	1011	0111	110	111	010	0111	100

Правильный ответ: а.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

Исполнитель Черепаха действует на плоскости с декартовой системой координат. В начальный момент Черепаха находится в начале координат, ее голова направлена вдоль положительного направления оси ординат, хвост опущен. При опущенном хвосте Черепаха оставляет на поле след в виде линии. В каждый конкретный момент известно положение исполнителя и направление его движения. У исполнителя существует 6 команд: **Поднять хвост**, означающая переход к перемещению без рисования; **Опустить хвост**, означающая переход в режим рисования; **Вперед n** (где n – целое число), вызывающая передвижение Черепахи на n единиц в том направлении, куда указывает ее голова; **Назад n** (где n – целое число), вызывающая передвижение в противоположном голове направлении; **Направо m** (где m – целое число), вызывающая изменение направления движения на m градусов по часовой стрелке; **Налево m** (где m – целое число), вызывающая изменение направления движения на m градусов против часовой стрелки.

Запись **Повтори k [Команда1 Команда2 ... Команда S]** означает, что последовательность из S команд повторится k раз.

Черепахе был дан для исполнения следующий алгоритм:

Повтори 3 [Вперед 23 Направо 90 Вперед 10 Направо 90]

Поднять хвост

Вперед 4 Направо 90 Вперед 8 Налево 90

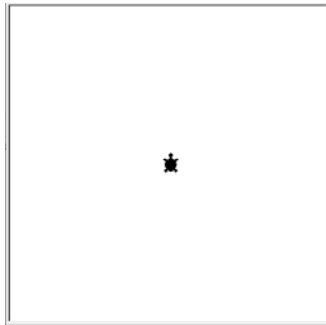
Опустить хвост

Повтори 9 [Вперед 53 Направо 90 Вперед 75 Направо 90]

Определите периметр области пересечения фигур, ограниченных заданными алгоритмом линиями.

Решение

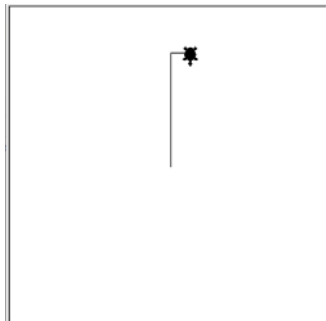
Размещаем черепашку в центр координат.



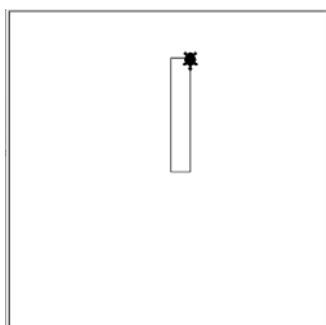
Команды

Вперед 23 Направо 90 Вперед 10 Направо 90

позволят построить два отрезка длиной 23 и 10.



Если же повторить эти команды два раза, то будет построен прямоугольник со сторонами 23×10 . После трех повторений черепашка окажется в правом верхнем углу прямоугольника и будет смотреть вниз.



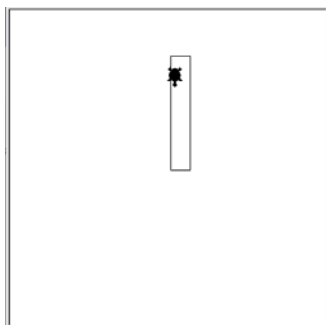
Следующий набор команд:

Поднять хвост

Вперед 4 Направо 90 Вперед 8 Налево 90

Опустить хвост

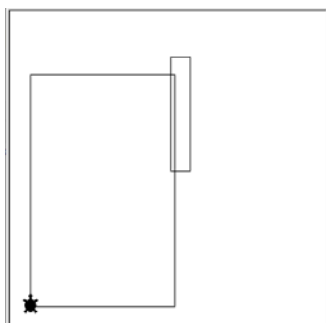
переместит черепашку в новую точку.



Последний цикл

Повтори 9 [Вперед 53 Направо 90 Вперед 75 Направо 90]

позволит нарисовать новый прямоугольник размером 53×75.



В итоге получили, что пересечением двух прямоугольников является прямоугольник. Осталось поставить размеры и рассчитать периметр:



Из рисунка видно, что высота нового прямоугольника равна 19, а ширина 2. Отсюда находим периметр:

$$19 + 2 + 19 + 2 = 42.$$

Правильный ответ: 42.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include<stdio.h> int main() { int s = 228550, n = 0; while (s > 0) { n = n + s%10; s = s/10; } printf("%d\n", n); return 0; }</pre>	<pre>s = 228550 n = 0 while s > 0: n = n + s % 10 s = s // 10 print(n)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг нач цел s, n s := 228550 n := 0 нц пока s > 0 n := n + mod(s, 10) s := div(s, 10) кц вывод n кон</pre>	<pre>var s, n: integer; begin s := 228550; n := 0; while s > 0 do begin n := n + s mod 10; s := s div 10; end; writeln(n) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: s = 228550
02: n = 0
03: while s > 0:
04:     n = n + s % 10
05:     s = s // 10
06: print(n)
```

Выполняем первую строку ($s = 228550$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбец s записываем 228550. Следующая команда присваивает n значение 1. Проверяем условие $s > 0$, т. к. число 228550 больше нуля, то делим s нацело на 10 и остаток от деления прибавляем к n . Новое значение для n записываем в таблицу. Делим s нацело на 10 и результат помещаем в переменную s . Повторяем строки 3, 4 и 5 до тех пор, пока значение переменной s не станет равной нулю.

№	s	n
01	228550	
02		0
04		0
05	22855	
04		5
05	2285	
04		10
05	228	
04		18
05	22	
04		20
05	2	
04		22
05	0	
06		22

Правильный ответ: 22.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include<stdio.h> long F(long x) { If (x > 0){ return (x-2)**2 + 2; } else{ return (x+2)**2 + 16 } int main() { long a, b, t, M, R; a = -10; b = 10; M = a; R = F(a); for (t=a; t<=b; t++) { if (F(t) <= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%ld", M+R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): if x > 0: return (x-2)**2 + 2 else: return (x+2)**2 + 16 a = -10 b = 10 M = a; R = F(a) for t in range(a,b+1): if F(t) <= R: M = t; R = F(t) print(M+R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -10; b := 10 M := a; R := F(a) <u>нц для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) <= R <u>то</u> M := t; R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M+R <u>кон</u> <u>алг цел</u> F(<u>цел</u> x) <u>нач</u> <u>если</u> x > 0 <u>то знач</u> := (x-2)**2 + 2 <u>иначе знач</u> := (x-2)**2 + 16 <u>все</u> <u>кон</u></pre>	<pre>var a, b, t, M, R :longint; function F(x: longint) : longint; begin if x > 0 Then F := (x-2)**2 + 2 else F := (x-2)**2 + 16; end; begin a := -10; b := 10; M := a; R := F(a); for t := a to b do begin if (F(t) <= R) then begin M := t; R := F(t) end end; write(M+R) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет много строк.

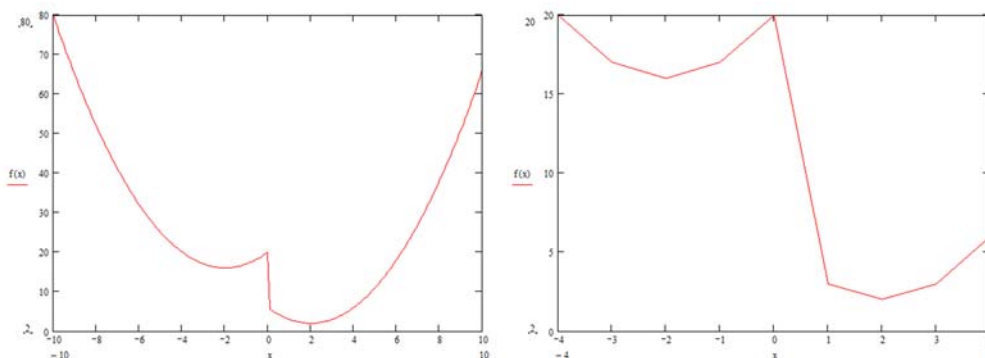
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -10 до $+10$ с шагом 1. Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \leq R,$$

где $F(t)$ – это значение функции при текущем значении переменной t , R – это значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что производится поиск минимума функции. Построим график функции:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + 2, & \text{при } x > 0, \\ (x+2)^2 + 16, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$



Из графика видим, что минимум будет в точке $(2, 2)$, т. е. $M = 2$ и $R = 2$.

На экран выводится их сумма.

Правильный ответ: 4.

(5 баллов)

Вариант 5
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Сколько единиц в двоичной записи четверичного числа 33213_4 ?

Решение

Составим таблицу соответствия записи первых четырех цифр в разных системах счисления:

Десятичная	Двоичная	Четверичная
0	00	0
1	01	1
2	10	2
3	11	3

Заменяем в числе 33213_4 каждую цифру ее двоичным эквивалентом из таблицы:

$$11\ 11\ 10\ 01\ 11_2.$$

Подсчитаем количество единиц.

Правильный ответ: 8.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $2025_8 < N < 2026_{16}$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления. Для удобства выберем десятичную систему счисления.

$$2025_8 \Rightarrow 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 1024 + 0 + 16 + 5 = 1045_{10}$$

$$2026_{16} \Rightarrow 2 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = 8192 + 0 + 32 + 6 = 8230_{10}$$

Вычтем из 8203_2 число 1045.

$$8230 - 1045 = 7185.$$

Так как неравенство строгое, необходимо вычесть еще единицу. В результате получим: 7184.

Правильный ответ: 7184.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $1243_5 + 204_6 - 56_8$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

$$1243_5 \Rightarrow 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 125 + 50 + 20 + 3 = 198_{10}$$

$$204_6 \Rightarrow 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 72 + 0 + 4 = 76_{10}$$

$$56_8 \Rightarrow 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 40 + 6 = 46_{10}$$

Подставляем в исходное выражение и вычисляем:

$$198_{10} + 76_{10} - 46_{10} = 228_{10}$$

Правильный ответ: 228.

(5 баллов)

Решение

Среднее арифметическое трех чисел определяется по формуле:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Чтобы сложить три числа, нужно, чтобы они были в одной системе счисления. Поскольку ответ необходимо дать в десятичной системе счисления, запишем все исходные данные в ней.

$$421_6 = 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = 144 + 12 + 1 = 157_{10}$$

$$234_7 = 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 98 + 21 + 4 = 123_{10}$$

$$1022_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 6 + 2 = 35_{10}$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{157 + 123 + 35}{3} = \frac{315}{3} = 105.$$

Правильный ответ: 105.

(5 баллов)

Вопрос 6

Дан ряд целых чисел, записанных в девятеричной системе счисления: 18_9 , 21_9 , 23_9 , 25_9 , 27_9 , 30_9 , 32_9 . Сколько среди них чисел, которые меньше, чем 110_4 ?

Решение

Запишем число 110_4 в системе счисления с основанием девять.

$$110_4 \Rightarrow 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 16 + 4 = 20_{10} = 2 \cdot 9^1 + 2 \cdot 3^0 \Rightarrow 22_9.$$

Подставляем это число в ряд из троичных чисел. Видим, что оно располагается между 21_9 и 23_9 . Таким образом, слева от 110_4 находится всего два числа.

Правильный ответ: 2.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

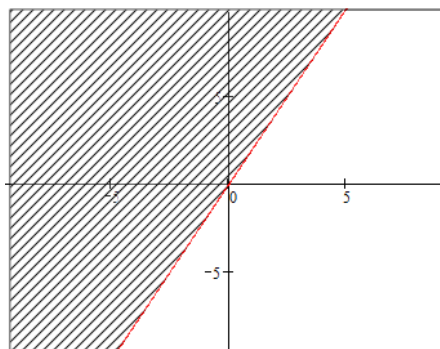
$$(2x + y \neq 78) \vee (2x < y) \vee (A < x)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

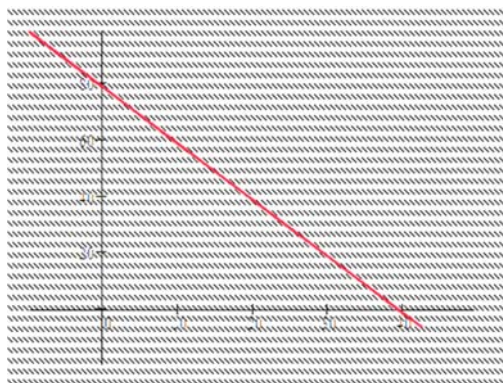
Решение

В данном выражении три события соединены операцией ИЛИ. Наступление любого из этих событий приведет к истинности всего выражения. Определим ту часть плоскости XU , на которой первые два события будут всегда ложны.

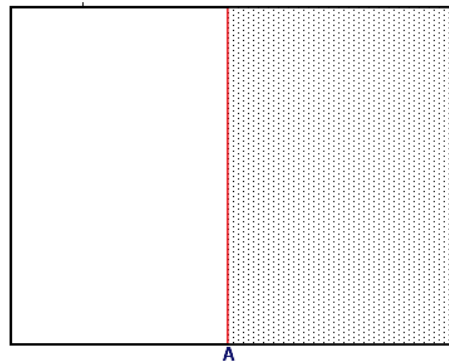
Выражение $2x < y$ будет истинным для любой точки, которая лежит выше прямой $y = 2x$.



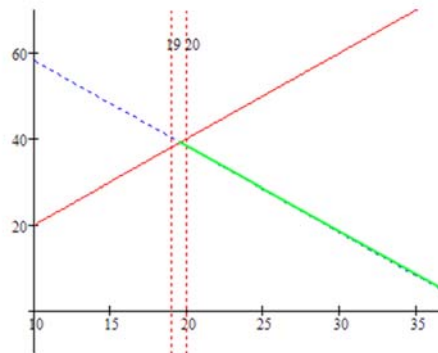
Первое выражение вернет истину на всей плоскости кроме точек, лежащих на прямой $y = 78 - 2x$.



Выражение $A < x$ будет истинным для всех точек, которые лежат справа от прямой $x = A$.



Таким образом, первые два выражения дадут нам ложь только в том случае, если точки будут лежать на прямой $y = 78 - 2x$ справа от прямой $y = 2x$ (зеленая линия). Необходимо переместить точку A в третьем выражении таким образом, чтобы эта часть прямой лежала от нее справа. Тогда при любых x и y исходное выражение будет всегда истинным.



Правильный ответ: 19.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения

$$((A \rightarrow B) \wedge C) \vee A.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(\left(A \overset{1}{\rightarrow} B \right) \overset{2}{\wedge} C \right) \overset{3}{\vee} A$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Правильный ответ: 01011111.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

Для кодирования букв В, И, Л, С, Т решили использовать двухразрядные последовательные двоичные числа (от 000 до 100 соответственно). Если таким способом закодировать последовательность символов ЛИСТ и записать результат шестнадцатеричным кодом, то какое число получится?

Решение

Запишем для каждой буквы ее код:

В – 000, И – 001, Л – 010, С – 011, Т – 100.

Теперь в слове РАМА заменим каждый символ его двоичным кодом:

Л	И	С	Т
010	001	011	100

Перейдем от двоичного кода 010001011100 к шестнадцатеричному:

0100 0101 1100 → 45С.

Правильный ответ: 45С.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

Д	Е	Л	М	О	Ь
00	10	011	110	010	111

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 1100100010011001
- b) 1100100010011111
- c) 1100100010011101
- d) 1100100010011100

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, значит, процесс декодирования завершился некорректно.

Вариант а: 1100100010011001

Берем первый бит – 1. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 11. Нет такого кода. Добавляем бит – 110. Новый код соответствует символу М. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая есть в таблице – 010, что соответствует символу О.

Получили: МО. Оставшийся код: 00 10 011 001

Продолжаем декодирование и в результате получим МОДЕЛД?. Один символ никак не декодируется, поскольку такого кода нет в нашей таблице.

110	010	00	10	011	00	1
М	О	Д	Е	Л	Д	?

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант b: 1100100010011111

110	010	00	10	011	111
М	О	Д	Е	Л	Ь

Вариант с: 1100100010011101

110	010	00	10	011	10	1
М	О	Д	Е	Л	Е	?

Вариант d: 1100100010011100

110	010	00	10	011	10	0
М	О	Д	Е	Л	Е	?

Правильный ответ: b.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

А	Д	Е	К	Л	М	Н	О	П	Р	Ф
000	001	0100	0101	011	100	1010	1011	110	1110	1111

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову ПРОДЕЛКА.

- а) 1101110101100101000110101000
- б) 1101110101110001001010000001
- в) 10100100111110111110100000011
- г) 11110110001000100101001011011
- д) 01011011100000101000101001110

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «ПРОДЕЛКА». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

П	Р	О	Д	Е	Л	К	А
110	1110	1011	001	0100	011	0101	000

Правильный ответ: а.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

- 1) прибавь 1,
- 2) умножь на 4.

Выполняя первую из них, Калькулятор прибавляет к числу на экране 1, а выполняя вторую, умножает его на 4.

Например, **2121** – это программа:

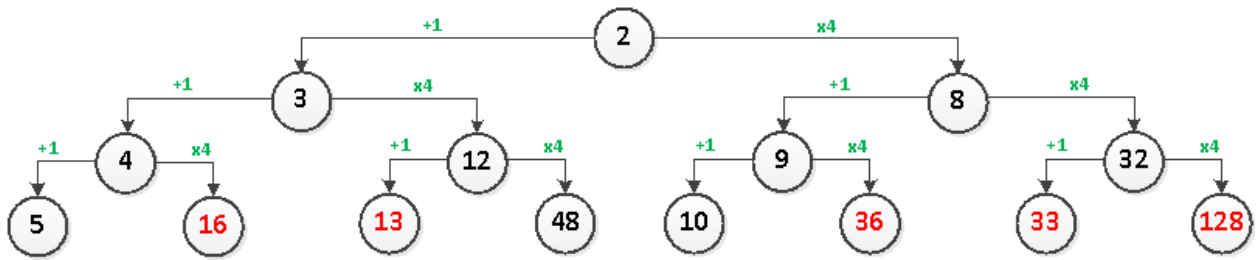
- умножь на 4,
- прибавь 1,
- умножь на 4,
- прибавь 1,

которая преобразует число 1 в число 21.

Запишите порядок команд в программе, которая преобразует число **2** в число **50** и содержит не более пяти команд. Указывайте лишь номера команд.

Решение

Так как команд всего две, можем составить бинарное дерево результатов.



Нижний ряд – это результат работы всех программ, состоящих из трех команд. Прежде чем строить дерево команд дальше, можно отбросить значение 128, т. к. оно уже больше, чем нужно нам (50). Также можно отбросить значения, которые при умножении на пять дадут результат больше 50 и при сложении с двойкой (две команды *прибавь 1*) не позволят получить нужный результат. Это числа: 16, 13, 36, 33.

Можно построить дерево для оставшихся ветвей. Но здесь уже очевидно, что нужное нам число равно 48. Прибавим к нему два раза по одному и получим нужный результат. Чтобы получить число 48, мы проделали следующие операции: $(2 + 1) \cdot 4 \cdot 4$.

Правильный ответ: 12211.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <iostream> using namespace std; int main() { int x = 5, y = 3, z = 0; while (x <= 30) { for (int i = 1; i <= y; i++) { z = z + i; } x = x + 10; y = y + 2; } cout << z; return 0; }</pre>	<pre>x = 5 y = 3 z = 0 while x <= 30: for i in range(1, y + 1): z = z + i x = x + 10 y = y + 2 print(z)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> <u>нач</u> <u>цел</u> x, y, z, i x := 5 y := 3 z := 0 <u>нц</u> <u>пока</u> x <= 30 <u>нц</u> <u>для</u> i <u>от</u> 1 <u>до</u> y z := z + i <u>кц</u> x := x + 10 y := y + 2 <u>кц</u> <u>вывод</u> z <u>кон</u></pre>	<pre>var x, y, z, i: integer; begin x := 5; y := 3; z := 0; while x <= 30 do begin for i := 1 to y do z := z + i; x := x + 10; y := y + 2; end; writeln(z) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: x = 5
02: y = 3
03: z = 0
04: while x <= 30:
05:     for i in range(1, y + 1):
06:         z = z + i
07:         x = x + 10
08:         y = y + 2
09: print(z)
```

Выполняем первые три строки ($x = 5$, $y = 3$, $z = 0$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбцы x , y , z записываем 5, 3 и 0 соответственно.

Проверяем условие $x < 30$, т. к. x равно 5, выполняем тело цикла `while`. Строки 05 и 06 – это цикл `for`, в котором находится сумма натуральных чисел от единицы до y , и эта сумма прибавляется к z . Поскольку $y = 3$, то $z = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$. Далее увеличиваем значения x , y на 10 и 2 соответственно.

Повторяем шаги 04–08, пока x не достигнет значения 35. Выводим результат.

№	x	y	z
01	5		
02		3	
03			0
05–06			6
07	15		
08		5	
05–06			21
07	25		
08		7	
05–06			49
07	35		
08		9	

Правильный ответ: 49.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <stdio.h> #include <stdlib.h> int F(int x) { if (x < 0) { return abs(x + 10) + 5; } else { return abs(x - 10) + x; } } int main() { int a = -20; int b = 20; int M = a; int R = F(a); for (int t = a; t <= b; t++) { if (F(t) <= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%d\n", M + R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): if x < 0: return abs(x + 10) + 5 else: return abs(x - 10) + x a = -20 b = 20 M = a R = F(a) for t in range(a, b + 1): if F(t) <= R: M = t R = F(t) print(M + R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> Сумма <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -20 b := 20 M := a R := F(a) <u>нц</u> <u>для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) <= R <u>то</u> M := t R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M + R <u>кон</u> <u>алг</u> <u>цел</u> F(<u>цел</u> x) <u>нач</u> <u>если</u> x < 0 <u>то</u> знач := abs(x + 10) + 5 <u>иначе</u> знач := abs(x - 10) + x <u>все</u> <u>кон</u></pre>	<pre>function F(x: Integer): Integer; begin if x < 0 then F := Abs(x + 10) + 5 else F := Abs(x - 10) + x; end; var a, b, t, M: Integer; R: Integer; begin a := -20; b := 20; M := a; R := F(a); for t := a to b do if F(t) <= R then begin M := t; R := F(t); end; Writeln(M + R); end.</pre>

Решение

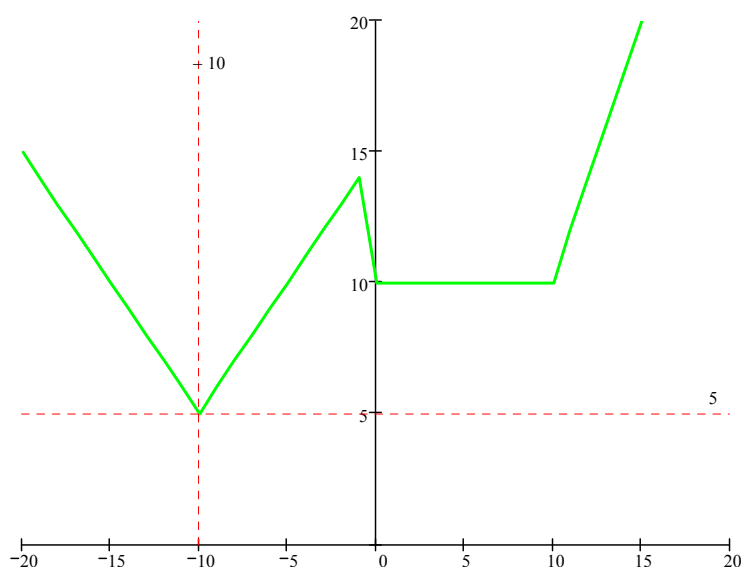
Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет довольно много строк.

Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -15 до $+15$ с шагом 1 . Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \leq R,$$

где $F(t)$ – значение функции при текущем значении переменной t , R – значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется минимум функции. Построим график функции $F(x)$.



Из графика видим, что минимум будет в точке $(-10, 5)$, т. е. $M = -10$ и $R = 5$. На экран выводится сумма этих значений.

Правильный ответ: -5 .

(5 баллов)

Вариант 6
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Сколько нулей в двоичной записи четверичного числа 2121213_4 ?

Решение

Составим таблицу соответствия записи первых четырех цифр в разных системах счисления:

Десятичная	Двоичная	Четверичная
0	00	0
1	01	1
2	10	2
3	11	3

Заменяем в числе 2121213_4 каждую цифру ее двоичным эквивалентом из таблицы:

$$10\ 01\ 10\ 01\ 10\ 01\ 11_2.$$

Подсчитаем количество нулей.

Правильный ответ: 6.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $В3_{16} < N < 11011010_2$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления.

Составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в различных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Заменяем в числе $B3_{16}$ каждую цифру ее двоичным эквивалентом:

$$1011\ 0011_2.$$

Вычтем из 11011010_2 , полученное число.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Так как неравенство строгое, необходимо вычесть еще единицу. В результате получим: 100110_2 . Ответ запишем в десятичной форме.

Правильный ответ: 38.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $1A4_{16} + 342_5 - 10110_2$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

Приведем все числа к десятичной системе счисления.

$$1A4_{16} \Rightarrow 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 256 + 160 + 4 = 420_{10}$$

$$342_5 \Rightarrow 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 75 + 20 + 2 = 97_{10}$$

$$10110_2 \Rightarrow 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22_{10}$$

Подставляем в исходное выражение:

$$420_{10} + 97_{10} - 22_{10} = 495_{10}.$$

Правильный ответ: 495.

(5 баллов)

Вопрос 4

Значение арифметического выражения

$$3 \cdot 729^4 + 2 \cdot 243^5 - 4 \cdot 81^6 + 27^7 - 2 \cdot 9^8 - 6561$$

записали в системе счисления с основанием 27. Определите количество цифр в 27-ричной записи числа, значение которых больше 13.

Решение

Запишем каждое слагаемое в виде выражения $a \cdot 27^k$, где a – некоторый цифра 27-ричного числа в $k+1$ -м разряде.

$$3 \cdot 729^4 = 3 \cdot (27^2)^4 = 3 \cdot 27^8$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 243^5 &= 2 \cdot (9 \cdot 27)^5 = 2 \cdot 9^5 \cdot 27^5 = 2 \cdot (3^2)^5 \cdot 27^5 = 2 \cdot 3^{10} \cdot 27^5 = \\ &= 2 \cdot 3^{9+1} \cdot 27^5 = 2 \cdot 3^{9+1} \cdot 27^5 = 2 \cdot 3^9 \cdot 3^1 \cdot 27^5 = 2 \cdot 3 \cdot (3^3)^3 \cdot 27^5 = 2 \cdot 3 \cdot 27^3 \cdot 27^5 = \\ &= 6 \cdot 27^8 \end{aligned}$$

Во втором слагаемом сначала получили коэффициент $2 \cdot 9^5$. Но он явно больше 26, поэтому не может быть цифрой числа в системе счисления с основанием 27. После небольших преобразований 9^5 записали в виде $3 \cdot 27^3$. Затем привели выражение к желаемому виду.

$$4 \cdot 81^6 = 4 \cdot (3 \cdot 27)^6 = 4 \cdot 3^6 \cdot 27^6 = 4 \cdot (3^3)^2 \cdot 27^6 = 4 \cdot 27^2 \cdot 27^6 = 4 \cdot 27^8$$

$$2 \cdot 9^8 = 2 \cdot (3^2)^8 = 2 \cdot 3^{16} = 2 \cdot 3^{15+1} = 2 \cdot 3^1 \cdot 3^{15+1} = 2 \cdot 3^1 \cdot (3^3)^5 = 6 \cdot 27^5$$

$$6561 = 9 \cdot 27 \cdot 27 = 9 \cdot 27^2$$

В результате получим следующее выражение:

$$3 \cdot 27^8 + 6 \cdot 27^8 - 4 \cdot 27^8 + 27^7 - 6 \cdot 27^5 - 9 \cdot 27^2$$

$$5 \cdot 27^8 + 27^7 - 6 \cdot 27^5 - 9 \cdot 27^2$$

27^k в системе счисления с основанием 27 запишется как 1 и k нулей. В этом случае:

$$5 \cdot 27^8 \Rightarrow 500000000_{27}$$

$$27^7 \Rightarrow 10000000_{27}$$

$$6 \cdot 27^5 \Rightarrow 600000_{27}$$

$$9 \cdot 27^2 \Rightarrow 900_{27}$$

Складываем и вычитаем:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \quad \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 - \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad 5 \quad 0 \quad 26 \quad 21 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 9 \quad 0 \quad 0 \\
 \quad \quad 5 \quad 0 \quad 26 \quad 20 \quad 26 \quad 26 \quad 18 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

Считаем, сколько цифр в полученном числе больше 13, и записываем ответ.

Правильный ответ: 5.

(5 баллов)

Вопрос 5

Найдите среднее арифметическое чисел 243_5 , $A3_{16}$ и 1011011_2 . Ответ представьте в десятичной системе счисления.

Решение

Среднее арифметическое трех чисел определяется по формуле:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Чтобы сложить три числа, нужно, чтобы они были в одной системе счисления. Поскольку ответ необходимо дать в десятичной системе счисления, запишем все исходные данные в ней.

$$243_5 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 50 + 20 + 3 = 73_{10}$$

$$A3_{16} = A \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 160 + 3 = 163_{10}$$

$$1011011_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91_{10}$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{73 + 163 + 91}{3} = \frac{327}{3} = 109.$$

Правильный ответ: 109.

(5 баллов)

Вопрос 6

Дан ряд целых чисел, записанных в двоичной системе счисления: 1011_2 , 1100_2 , 1101_2 , 1110_2 , 10000_2 , 10001_2 , 10010_2 , 10011_2 , 10100_2 . Сколько среди них чисел, которые **больше**, чем 120_3 ?

Решение

Нужно привести все числа к единой системе счисления. Проще это сделать с числом 120_3 .

$$120_3 \Rightarrow 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 0 = 15_{10} \Rightarrow 1111_2$$

Поскольку исходный ряд упорядочен по возрастанию, легко подсчитать все пятиразрядные двоичные числа.

Правильный ответ: 5.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

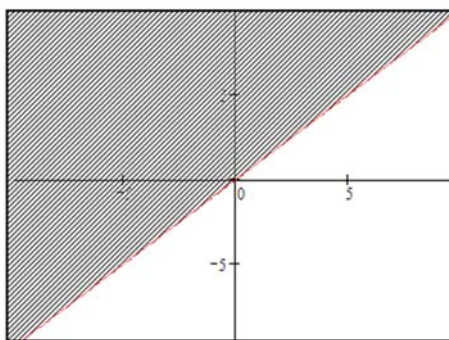
$$(A < x) \vee (x < y) \vee (2x + y \neq 29)$$

тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

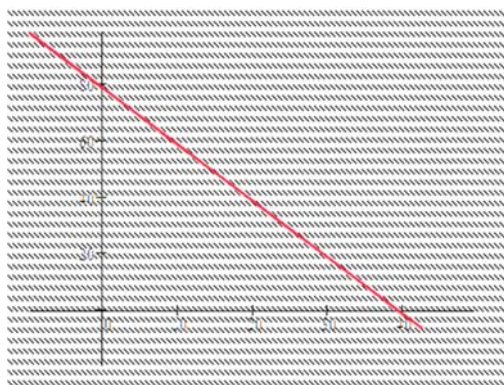
Решение

В данном выражении три события соединены операцией ИЛИ. Наступление любого из этих событий приведет к истинности всего выражения. Определим ту часть плоскости XU , на которой первые два события будут всегда ложны.

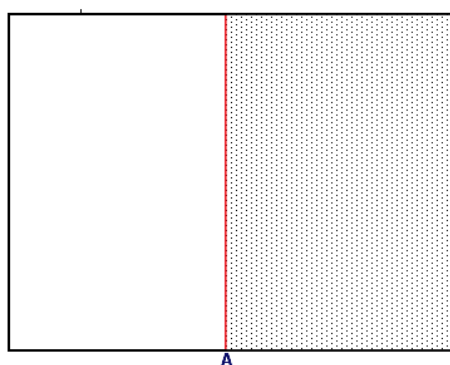
Выражение $x < y$ будет истинным для любой точки, которая лежит выше прямой $y = x$.



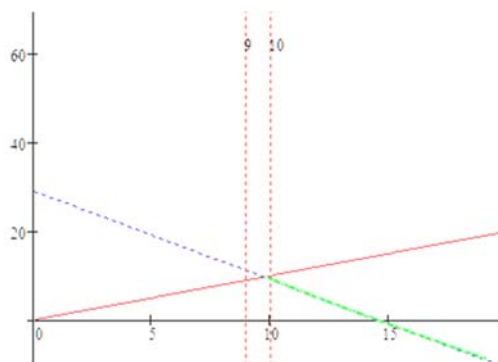
Первое выражение вернет истину на всей плоскости кроме точек, лежащих на прямой $y = 29 - 2x$.



Выражение $A < x$ будет истинным для всех точек, которые лежат справа от прямой $x = A$.



Таким образом, первые два выражения дадут нам ложь только в том случае, если точки будут лежать на прямой $y = 29 - 2x$ справа от прямой $y = x$ (зеленая линия). Необходимо переместить точку A в третьем выражении таким образом, чтобы эта часть прямой лежала от нее справа. Тогда при любых x и y исходное выражение будет всегда истинным.



Правильный ответ: 9.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения

$$((B \rightarrow A) \rightarrow C) \vee B.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(\left(B \overset{1}{\rightarrow} A \right) \overset{2}{\rightarrow} C \right) \overset{3}{\vee} B$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Правильный ответ: 01110111.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

Для кодирования букв М, И, Р, А решили использовать двухразрядные последовательные двоичные числа (от 00 до 11 соответственно). Если таким способом закодировать последовательность символов РАМА и записать результат шестнадцатеричным кодом, то какое число получится?

Решение

Запишем для каждой буквы его код:

М – 00, И – 01, Р – 10, А – 11.

Теперь в слове РАМА заменим каждый символ его двоичным кодом:

Р	А	М	А
10	11	00	11

Перейдем от двоичного кода 10110011 к шестнадцатеричному:

1011 0011 → В3

Правильный ответ: В3.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

С	А	Л	О	Н
00	01	100	101	111

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке, только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 0001100110111
- b) 0001100101110
- c) 0001100101101
- d) 0001100101111

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, значит, процесс декодирования завершился не корректно.

Вариант а: 0001100110111

Берем первый бит – 0. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 00. Новый код соответствует символу С. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая есть в таблице – 01, что соответствует символу А.

Получили: СА. Оставшийся код: 100110111

Продолжаем декодирование и в результате получим САЛ?Н. Один символ никак не декодируется, поскольку такого кода нет в нашей таблице.

00	01	100	110	111
С	А	Л	?	Н

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант b: 001100101110

00	01	100	101	110
С	А	Л	О	?

Вариант с: 0001100101101

00	01	100	101	00	1
С	А	Л	О	С	?

Вариант d: 0001100101111

00	01	100	101	111
С	А	Л	О	Н

Правильный ответ: d.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

А	Д	Е	К	Л	М	Н	О	П	Р	Ф
000	001	0100	0101	011	100	1010	1011	110	1110	1111

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову ПРОМЕНАД.

- а) 1101110101100101000110101000
- б) 1101110101110001001010000001
- в) 10100100111110111110100000011
- г) 11110110001000100101001011011
- д) 01011011100000101000101001110

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «ПРОМЕНАД». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

П	Р	О	М	Е	Н	А	Д
110	1110	1011	100	0100	1010	000	001

Правильный ответ: б.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

На вход алгоритма подается натуральное число N . Алгоритм строит по нему новое число R следующим образом:

1. Строится двоичная запись числа N .
2. Далее эта запись обрабатывается по следующему правилу:
 - а) если число N делится на 3, то к этой записи дописываются ее три последние двоичные цифры;
 - б) если число N на 3 не делится, то остаток от деления умножается на 3, переводится в двоичную запись и дописывается в конец числа.

Полученная таким образом запись является двоичной записью искомого числа R .

3. Результат переводится в десятичную систему и выводится на экран.

Например, для исходного числа $12_{10} = 1100_2$ результатом является число $1100100_2 = 100_{10}$, а для исходного числа $4_{10} = 100_2$ это число $10011_2 = 19_{10}$.

Укажите минимальное число N , после обработки которого с помощью этого алгоритма получается число R , не меньшее 200.

Решение

Начинаем решать задачу с конца. Нам нужно число, которое в двоичной форме оканчивается на

- а) 11 – остаток от деления равен 1;
- б) 110 – остаток от деления равен 2;
- в) такие же три символа, как и предпоследние.

Переведем число 200 в двоичную систему счисления:

$$200_{10} = 128 + 64 + 8 = 2^7 + 2^6 + 2^3 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow 11001000_2.$$

Последние три цифры 000 не содержат искомые комбинации. Следовательно, рассматриваем ближайшие к нему числа. Если отбросить три последние цифры (правила «б» и «в»), то получим число:

$$11001_2 \Rightarrow 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 1 = 25_{10}.$$

Оно не кратно трем и в остатке дает единицу. Следовательно, применяя к нему описанный в задании алгоритм, мы получим:

$$25 \Rightarrow 11001 \Rightarrow 1100111 \Rightarrow 103.$$

Число 103 меньше 200. Это противоречит условию «не меньше 200». Рассмотрим ближайшие к нему числа:

$$23 \Rightarrow 10111 \Rightarrow 10111110 \Rightarrow 190$$

$$24 \Rightarrow 11000 \Rightarrow 11000000 \Rightarrow 192$$

$$26 \Rightarrow 11010 \Rightarrow 11010110 \Rightarrow 214$$

Видим, что при выборе чисел меньше 25 число R будет меньше 200. Ищем ближайшее целое, большее чем 25.

Правильный ответ: 26.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <iostream> using namespace std; int main() { int s = 2, n = 1; while (s < 100) { s = s * 2; n = n + 1; } cout << n; return 0; }</pre>	<pre>s = 2 n = 1 while s < 100: s = s * 2 n = n + 1 print(n)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre>алг нач цел s, n s := 2 n := 1 нц пока s < 100 s := s * 2 n := n + 1 кц вывод n кон</pre>	<pre>var s, n: integer; begin s := 2; n := 1; while s < 100 do begin s := s * 2; n := n + 1; end; writeln(n) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: s = 2
02: n = 1
03: while s < 100:
04:     s = s * 2
05:     n = n + 1
06: print(n)
```

Выполняем первую строку ($s = 2$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбец s записываем 2. Следующая команда присваивает n значение 1.

Проверяем условие $s < 100$, т. к. s равно двум, то увеличиваем s в два раза и записываем новое значение в таблицу. Увеличиваем n на один и также записываем в таблицу новое значение уже для n . Повторяем строки 3, 4 и 5 до тех пор, пока s не станет больше ста.

№	s	n
01	2	
02		1
04	4	
05		2
04	8	
05		3
04	16	
05		4
04	32	
05		5
04	64	
05		6
04	128	
05		7

Правильный ответ: 7.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <stdio.h> #include <stdlib.h> int F(int x) { return 20 - abs(x - 5) - abs(x + 5); } int main() { int a = -20; int b = 20; int M = a; int R = F(a); for (int t = a; t <= b; t++) { if (F(t) >= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%d\n", M + R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): return 20 - abs(x - 5) - abs(x + 5) a = -20 b = 20 M = a R = F(a) for t in range(a, b + 1): if F(t) >= R: M = t R = F(t) print(M + R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> Сумма <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -20 b := 20 M := a R := F(a) <u>нц для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) >= R <u>то</u> M := t R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M + R <u>кон</u> <u>алг цел</u> F(цел x) <u>нач</u> знач := 20 - abs(x - 5) - abs(x + 5) <u>кон</u></pre>	<pre>function F(x: Integer): Integer; begin F := 20 - Abs(x - 5) - Abs(x + 5); end; var a, b, t, M: Integer; R: Integer; begin a := -20; b := 20; M := a; R := F(a); for t := a to b do if F(t) >= R then begin M := t; R := F(t); end; Writeln(M + R); end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет довольно много строк.

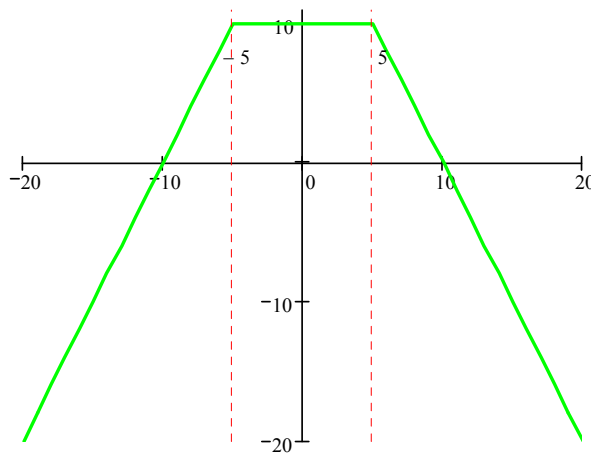
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -20 до $+20$ с шагом 1. Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \geq R,$$

где $F(t)$ – это значение функции при текущем значении переменной t , R – это значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется максимум функции. Построим график функции:

$$F(x) = 20 - \text{abs}(x - 5) - \text{abs}(x + 5).$$



Из графика видим, что максимум будет на интервале от -5 до $+5$. Так как используется условие «больше либо равно» (\leq) берем вторую точку, т. е. $M = 5$ и $R = 10$. На экран выводится сумма этих значений.

Правильный ответ: 15.

(5 баллов)

Вариант 7
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Имеется шестнадцатеричное число 53977_{16} . Если записать его в восьмеричной системе счисления, то сколько различных цифр будет в этой записи?

Решение

Можно решить задачу двумя способами:

- перевести число в десятичную форму, а затем в восьмеричную;
- перевести число в двоичную форму, а затем в восьмеричную.

Выберем второй способ, для чего составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в разных системах счисления:

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000		8
9	1001		9
10	1010		A
11	1011		B
12	1100		C
13	1101		D
14	1110		E
15	1111		F

Заменяем в числе 53977_{16} каждую цифру ее двоичным эквивалентом из таблицы. Важно помнить, что каждой шестнадцатеричной цифре соответствует четыре двоичных.

$0101\ 0011\ 1001\ 0111\ 0111_2$

Переводим двоичное число в восьмеричное. Для этого разделим на группы из трех символов (справа налево) и каждую группу заменим на восьмеричную цифру по таблице.

$$\begin{array}{cccccccc} 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Видим, что все цифры в числе различны. Следовательно, правильный ответ – 7.

Правильный ответ: 7.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $ВЗ_{16} \leq N < 11011010_2$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления.

Составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Заменяем в числе B_{16} каждую цифру ее двоичным эквивалентом:

$$1011\ 0011_2$$

Вычтем из 11011010_2 полученное число.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Так как первое неравенство нестрогое, необходимо включить левую границу. В результате ответ 100111_2 запишем в десятичной форме.

Правильный ответ: 39.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $503_7 - 1101_2 + 2D_{16}$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

Приведем все числа к десятичной системе счисления.

$$503_7 \Rightarrow 5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 245 + 0 + 3 = 248_{10}$$

$$1101_2 \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}$$

$$2D_{16} \Rightarrow 2 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 32 + 13 = 45_{10}$$

Подставляем в исходное выражение:

$$248_{10} - 13_{10} + 45_{10} = 280_{10}$$

Правильный ответ: 280.

(5 баллов)

Чтобы сложить три числа, нужно, чтобы они были в одной системе счисления. Поскольку ответ необходимо дать в десятичной системе счисления, запишем все исходные данные в ней.

$$372_8 = 3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 192 + 56 + 2 = 250_{10}$$

$$5C_{16} = 5 \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 80 + 12 = 92_{10}$$

$$1110101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 117_{10}$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{250 + 92 + 117}{3} = \frac{459}{3} = 153.$$

Правильный ответ: 153.

(5 баллов)

Вопрос 6

Дан ряд целых чисел, записанных в пятеричной системе счисления: 34_5 , 40_5 , 41_5 , 43_5 , 44_5 , 100_5 , 102_5 , 104_5 . Сколько среди них чисел, которые меньше, чем 40_7 ?

Решение

Запишем число 40_7 в системе счисления с основанием 5.

$$40_7 \Rightarrow 4 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 = 28_{10} \Rightarrow 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 103_5.$$

Теперь видно, что это число находится между числами 102_5 и 104_5 . Так как исходный ряд упорядочен, то все числа слева от 103_5 будут меньше его.

Правильный ответ: 6.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ».

Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 13) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение

В выражение входит четыре логических операций. Последней будет выполняться импликация. Запишем таблицу истинности для этой операции.

$\neg \text{ДЕЛ}(x, A)$	$\text{ДЕЛ}(x, 13) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9)$	\rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Как видно из таблицы, если A является делителем числа x , результат всего выражение – Истина. В обратном случае Истина будет при условии, что выражение $\text{ДЕЛ}(x, 13) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9)$ также не является ложным. Это возможно только при условии, что число x имеет в делителях и 13, и 9. Наименьшим таким числом является 117.

Правильный ответ: 117.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения

$$((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow A.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(\left(\overset{1}{A \vee B} \right) \overset{2}{\rightarrow C} \right) \overset{3}{\rightarrow A}$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Правильный ответ: 00101111.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

Для кодирования букв Т, Р, О, К решили использовать двухразрядные последовательные двоичные числа (от 00 до 11 соответственно). Если таким способом закодировать последовательность символов КРОТ и записать результат шестнадцатеричным кодом, то какое число получится?

Решение

Запишем для каждой буквы его код:

Т – 00, Р – 01, О – 10, К – 11.

Теперь в слове РАМА заменим каждый символ его двоичным кодом:

К	Р	О	Т
11	01	10	00

Перейдем от двоичного кода 11011000 к шестнадцатеричному:

1101 1000 → D8

Правильный ответ: D8.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

К	Л	М	Н	О
10	010	011	110	00

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 01100010001011
- b) 01100010001000
- c) 01100010001001
- d) 01100010001100

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменяем эту последовательность на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, значит, процесс декодирования завершился не корректно.

Вариант а: 01100010001011

Берем первый бит – 0. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 01. Нет такого кода. Добавляем бит – 011. Новый код соответствует символу М. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая есть в таблице – 00, что соответствует символу О.

Получили: МО. Оставшийся код: 010 00 1011

Продолжаем декодирование и в результате получим МОЛОК?. Один символ никак не декодируется, поскольку такого кода нет в нашей таблице.

011	00	010	00	10	11
М	О	Л	О	К	?

Аналогичным образом проверим остальные варианты.

Вариант b: 01100010001000

011	00	010	00	10	00
М	О	Л	О	К	О

Вариант с: 01100010001001

011	00	010	00	10	01
М	О	Л	О	К	?

Вариант d: 01100010001100

011	00	010	00	110	0
М	О	Л	О	Н	?

Правильный ответ: b.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

А	Д	Е	К	Л	М	Н	О	П	Р	Ф
000	001	0100	0101	011	100	1010	1011	110	1110	1111

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову ФЛАМЕНКО.

- а) 1101110101100101000110101000
- б) 1101110101110001001010000001
- в) 10100100111110111110100000011
- г) 11110110001000100101001011011
- д) 01011011100000101000101001110

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «ФЛАМЕНКО». Для этого вместо каждой буквы поставим соответствующий код из таблицы.

Ф	Л	А	М	Е	Н	К	О
1111	011	000	100	0100	1010	0101	1011

Правильный ответ: г.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

На вход алгоритма подается натуральное число N . Алгоритм строит по нему новое число R следующим образом:

1. Строится двоичная запись числа N .
2. К этой записи дописываются справа еще два разряда по следующему правилу:

а) складываются все цифры двоичной записи, и остаток от деления суммы на 2 дописывается в конец числа (справа)

(например, запись 11100 преобразуется в запись 111001);

б) над этой записью производятся те же действия – справа дописывается остаток от деления суммы цифр на 2.

Полученная таким образом запись (в ней на два разряда больше, чем в записи исходного числа N) является двоичной записью искомого числа R .

Укажите такое наименьшее число N , для которого результат работы алгоритма больше 39. В ответе это число запишите в десятичной системе счисления.

Решение

Возьмем число 11100 из примера условия задачи. В нем нечетное количество единиц, поэтому по правилу 2а добавляем единицу: 111001. Теперь количество единиц стало четным, поэтому по правилу 2б в конце числа добавляем нуль 1110010.

Очевидно, что если количество единиц в двоичной записи числа N изначально было четным числом, то в конце добавится два нуля.

Таким образом, нас интересуют двоичные числа, которые заканчиваются на 10 или 00.

Переведем число 40 в двоичную систему счисления:

$$40_{10} = 32 + 8 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow 101000_2.$$

Первое же число большее 39 дает нам искомую пару 00 на конце. Отбрасываем их и переводим число в десятичную систему счисления.

Правильный ответ: 10.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre> Си Python #include <iostream> using namespace std; int main() { int n = 1, sum = 0; while (sum <= 50) { sum = sum + n; n = n + 2; } cout << n - 2; return 0; } </pre>	<pre> n = 1 sum = 0 while sum <= 50: sum = sum + n n = n + 2 print(n - 2) </pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre> алг нач цел n, sum n := 1 sum := 0 нц пока sum <= 50 sum := sum + n n := n + 2 кц вывод n - 2 кон </pre>	<pre> var n, sum: integer; begin n := 1; sum := 0; while sum <= 50 do begin sum := sum + n; n := n + 2; end; writeln(n - 2) end. </pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: n = 1
02: sum = 0
03: while sum <= 50:
04:     sum = sum + n
05:     n = n + 2
06: print(n - 2)
```

Выполняем первую строку ($n = 1$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбец n записываем 1. Следующая команда присваивает sum значение 0.

Проверяем условие $s \leq 50$, т. к. sum равно нулю, то увеличиваем ее значение на n и записываем новое значение в таблицу. Увеличиваем n на два и также записываем в таблицу новое значение уже для n . Повторяем строки 3, 4 и 5 до тех пор, пока s не станет больше ста.

№	sum	n
01		1
02	0	
04	1	
05		3
04	4	
05		5
04	9	
05		7
04	16	
05		9
04	25	
05		11
04	36	
05		13
04	49	
05		15
04	64	
05		17

Значение sum больше 50, значит выходим из цикла. Выводится значение n - 2.

Правильный ответ: 15.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <stdio.h> #include <stdlib.h> int F(int x) { return (x - 10) * (x - 10) + 5 - 2 * abs(x); } int main() { int a = -10; int b = 30; int M = a; int R = F(a); for (int t = a; t <= b; t++) { if (F(t) <= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%d\n", M + R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): return (x - 10)**2 + 5 - 2 * abs(x) a = -10 b = 30 M = a R = F(a) for t in range(a, b + 1): if F(t) <= R: M = t R = F(t) print(M + R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>нач</u> <u>цел</u> a, b, t, M, R a := -10 b := 30 M := a R := F(a) <u>нц</u> <u>для</u> t <u>от</u> a <u>до</u> b <u>если</u> F(t) <= R <u>то</u> M := t R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M + R <u>кон</u> <u>алг</u> <u>цел</u> F(<u>цел</u> x) <u>нач</u> знач := (x - 10) * (x - 10) + 5 - 2 * abs(x) <u>кон</u></pre>	<pre>function F(x: Integer): Integer; begin F := (x - 10) * (x - 10) + 5 - 2 * abs(x); end; var a, b, t, M: Integer; R: Integer; begin a := -10; b := 30; M := a; R := F(a); for t := a to b do if F(t) <= R then begin M := t; R := F(t); end; writeln(M + R); end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет довольно много строк.

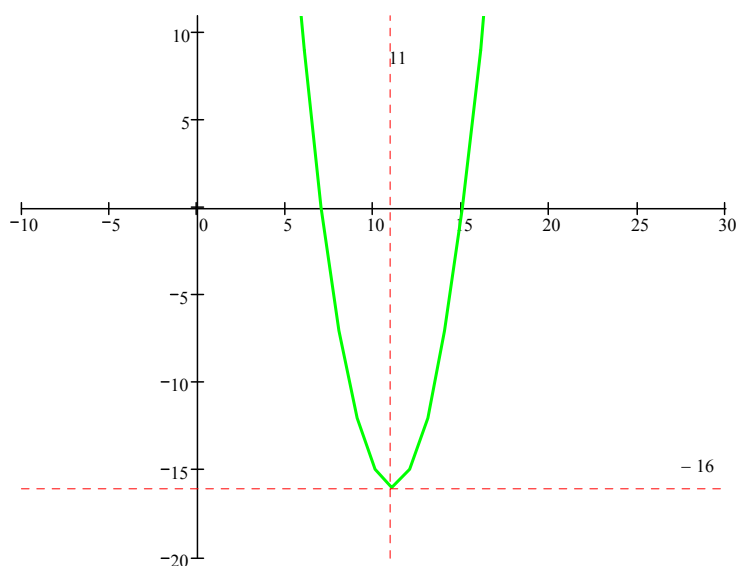
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -10 до $+30$ с шагом 1 . Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \leq R,$$

где $F(t)$ – значение функции при текущем значении переменной t , R – значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется минимум функции. Построим график функции:

$$F(x) = (x - 10)**2 + 5 - 2 * \text{abs}(x).$$



Из графика видим, что функция имеет один минимум в точке $(11, -16)$, т. е. $M = 11$ и $R = -16$. На экран выводится сумма этих значений.

Правильный ответ: -5 .

(5 баллов)

Вариант 8
(с решениями)

1. Системы счисления

Вопрос 1

Имеется восьмеричное число 52735167_8 . Если записать его в шестнадцатеричной системе счисления, то сколько различных цифр будет в этой записи?

Решение

Можно решить задачу двумя способами:

- перевести число в десятичную форму, а затем в шестнадцатеричную;
- перевести число в двоичную форму, а затем в шестнадцатеричную.

Выберем второй способ, для чего составим таблицу соответствия записи первых шестнадцати чисел в разных системах счисления.

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000		8
9	1001		9
10	1010		A
11	1011		B
12	1100		C
13	1101		D
14	1110		E
15	1111		F

Заменяем в числе 52735167_8 каждую цифру ее двоичным эквивалентом из таблицы. Важно помнить, что каждой восьмеричной цифре соответствует три двоичных.

$$101\ 010\ 111\ 011\ 101\ 001\ 110\ 111_2$$

Переводим двоичное число в шестнадцатеричное. Для этого разделим на группы из четырех символов (справа налево) и каждую группу заменим на восьмеричную цифру по таблице.

$$1010\ 1011\ 1011\ 1010\ 0111\ 0111_2$$

$$A\ B\ B\ A\ 7\ 7_{16}$$

Видим, что для записи числа используется три различных цифры: А, В и 7.

Правильный ответ: 3.

(5 баллов)

Вопрос 2

Сколько существует натуральных чисел N , для которых выполняется неравенство $23_4 < N \leq 3A_{12}$? В ответе укажите только количество чисел, сами числа писать не нужно.

Решение

Приведем оба числа к одной системе счисления. Для удобства выберем десятичную систему счисления.

$$123_4 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 1 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 16 + 8 + 3 = 27_{10}$$

Переведем $3A_{12}$ в десятичную систему. По аналогии с шестнадцатеричной системой счисления в системе с основанием двенадцать цифра A_{12} означает 10_{10} :

$$3A_{12} = 3 \cdot 12^1 + A \cdot 12^0 = 3 \cdot 12 + 10 \cdot 1 = 36 + 10 = 46_{10}$$

Теперь неравенство в десятичной системе можно записать следующим образом:

$$27_{10} < N \leq 46_{10}$$

Так как первое неравенство нестрогое, необходимо включить левую границу. Поэтому просто вычтем из правого числа левое:

$$46_{10} - 27_{10} = 19_{10}$$

Правильный ответ: 19.

(5 баллов)

Вопрос 3

Вычислите выражение: $111_9 + 22_4 - 1F_{16}$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Решение

Приведем все числа к одной системе счисления. Удобнее всего пользоваться десятичной системой.

$$111_9 \Rightarrow 1 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0 = 81 + 9 + 1 = 91_{10}$$

$$22_4 \Rightarrow 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 8 + 2 = 10_{10}$$

$$1F_{16} \Rightarrow 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 16 + 15 = 31_{10}$$

Подставляем в исходное выражение:

$$91_{10} + 10_{10} - 31_{10} = 70_{10}$$

Правильный ответ: 70.

(5 баллов)

Вопрос 4

Значение арифметического выражения $9^{15} + 3^7 - 9$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Решение

Число 9^{15} можно записать как 3^{30} . В троичной системе счисления это будет выглядеть как единица и тридцать нулей:

$$1000000000000000000000000000000_3.$$

Находим среднее арифметическое:

$$S_{\text{cp}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{75 + 54 + 51}{3} = \frac{180}{3} = 60.$$

Правильный ответ: 60.

(5 баллов)

Вопрос 6

Дан ряд целых чисел, записанных в троичной системе счисления: 102_3 , 110_3 , 112_3 , 121_3 , 200_3 , 202_3 , 211_3 , 220_3 . Сколько среди них чисел, которые больше, чем 22_4 ?

Решение

Запишем число 22_4 в троичной системе счисления.

$$22_4 \Rightarrow 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 8 + 2 = 10_{10} = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \Rightarrow 101_3.$$

Подставляем это число в ряд из троичных чисел. Видим, что оно располагается в самом начале. Следовательно, все восемь чисел ряда больше оно.

Правильный ответ: 8.

(5 баллов)

2. Логика и алгоритмы

Вопрос 7

На числовой прямой даны два отрезка: $D = [104; 124]$ и $C = [124; 158]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$(x \in D) \rightarrow ((\neg(x \in C) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in D))$$

истинна, т. е. принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Решение

Введем обозначения $x \in D \equiv D_x$, $x \in C \equiv C_x$, $x \in A \equiv A_x$ и перепишем выражение:

$$D_x \rightarrow ((\neg C_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg D_x).$$

В выражение входит пять логических операций. Последней будет выполняться импликация. Запишем таблицу истинности для этой операции.

D_x	$(\neg C_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg D_x$	\rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Как видно из таблицы, если точка x не попадает в интервал $D = [104; 124]$, то результат будет всегда Истина. В противном случае возможно два варианта, который зависит от результата выражения $(\neg C_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg D_x$. Чтобы исходное выражение равнялось Истина, нужно чтобы

$$(\neg C_x \wedge \neg A_x) \rightarrow \neg D_x = 1.$$

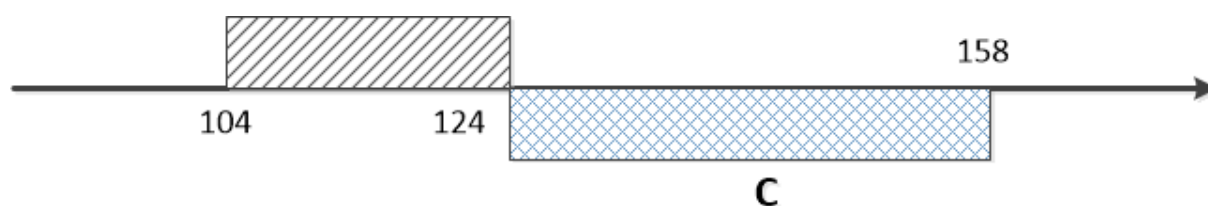
Последней операцией будет выполнена импликация.

$\neg C_x \wedge \neg A_x$	$\neg D_x$	\rightarrow
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Обращаем внимание, что мы рассматриваем вариант, при котором точка попадает в интервал D . В этом случае $\neg D_x$ всегда равно Ложь. Следовательно, результат всего выражения будет Истина, если операнд $\neg C_x \wedge \neg A_x = 0$. В данном выражении последней выполняется операция логического умножения (И).

$\neg C_x$	$\neg A_x$	\wedge
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Интервалы D и C практически не пересекаются (только в точке $x = 124$).



Отсюда следует, что на интервале $[104; 123]$ выражение $\neg C_x$ всегда Истина. Поэтому $\neg C_x \wedge \neg A_x = 0$ при условии $\neg A_x = 0$, или $A_x = 1$. Следовательно, интервал $A = [104, 123]$.

Длина отрезка A в данном случае равна $123 - 104 = 19$.

Правильный ответ: 19.

(14 баллов)

Вопрос 8

Заполните таблицу истинности логического выражения:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \wedge A.$$

В ответ введите значения, записанные в столбце F (сверху вниз, без пробелов).

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Решение

Расставим приоритеты логических операций и выполним их последовательно, фиксируя результаты в таблице истинности.

$$\left(\left(A \overset{1}{\rightarrow} B \right) \overset{2}{\rightarrow} C \right) \overset{3}{\wedge} A$$

A	B	C	1	2	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Правильный ответ: 00001101.

(5 баллов)

3. Информация и ее кодирование

Вопрос 9

Для кодирования букв Т, С, Л, А решили использовать двухразрядные последовательные двоичные числа (от 00 до 11 соответственно). Если таким способом закодировать последовательность символов ЛАСТ и записать результат шестнадцатеричным кодом, то какое число получится?

Решение

Запишем для каждой буквы его код:

Т – 00, С – 01, Л – 10, А – 11.

Теперь в слове РАМА заменим каждый символ его двоичным кодом:

Л	А	С	Т
10	11	01	00

Перейдем от двоичного кода 10110100 к шестнадцатеричному:

1011 0100 → В4

Правильный ответ: В4.

(5 баллов)

Вопрос 10

Для 5 букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из двух бит, для некоторых – из трех). Эти коды представлены в таблице:

А	В	К	О	Р
00	110	111	101	01

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке только одно прошло без ошибки и может быть корректно декодировано. Найдите его.

- a) 1111010110111000
- b) 1111010110111010
- c) 1111010110110000
- d) 1111010110111011

Решение

Проверим все четыре варианта и выберем тот, что соответствует условию задачи.

Декодирование будем проводить следующим образом. Берем по одному символу из шифра, пока не получим код из таблицы. Заменим эту последовательность

на соответствующую букву. Продолжим брать по одному символу, пока не получим новый код. И так до тех пор, пока не закончим декодирование. Если при этом останутся символы, которые мы не сможем никаким образом интерпретировать, значит, процесс декодирования завершился не корректно.

Вариант а: 1111010110111000

Берем первый бит – 1. Смотрим таблицу. Символа с таким кодом нет. Добавляем следующий бит – 11. Нет такого кода. Добавляем еще один бит – 111. Новый код соответствует символу К. Записываем первый символ и продолжаем декодирование. Следующая последовательность, которая есть в таблице – 101, что соответствует символу О.

Получили: КО. Оставшийся код: 01 101 110 00.

Продолжаем декодирование и в результате получим КОРОВА. Декодирование прошло успешно.

111	101	01	101	110	00
К	О	Р	О	В	А

Первый же вариант оказался правильным.

Правильный ответ: а.

(5 баллов)

Вопрос 11

Для нескольких букв русского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв – из трех бит, для некоторых – из четырех). Эти коды представлены в таблице:

А	Д	Е	К	Л	М	Н	О	П	Р	Ф
000	001	0100	0101	011	100	1010	1011	110	1110	1111

Из четырех полученных сообщений в этой кодировке найдите то, что соответствует слову НЕФОРМАЛ.

- а) 1101110101100101000110101000
- б) 1101110101110001001010000001
- в) 10100100111110111110100000011
- г) 11110110001000100101001011011
- д) 01011011100000101000101001110

Решение

Решить эту задачу можно двумя способами:

- закодировать слово и найти соответствующий код в списке;
- декодировать все коды в списке и найти соответствующее слово.

Закодируем слово «НЕФОРМАЛ». Для этого вместо каждой буквы подставим соответствующий код из таблицы.

Н	Е	Ф	О	Р	М	А	Л
1010	0100	1111	1011	1110	100	000	011

Правильный ответ: в.

(5 баллов)

4. Элементы теории алгоритмов

Вопрос 12

Исполнитель Прибавитель преобразует число на экране. У исполнителя две команды, которым присвоены номера:

- 1) прибавить 1,
- 2) увеличить старшую цифру числа на 1.

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает на 1 старшую (левую) цифру числа.

Например, число 23 с помощью такой команды превратится в число 33.

Если старшая цифра числа равна 9, то вторая команда оставляет это число неизменным.

Программа для исполнителя Прибавитель – это последовательность команд. Сколько существует программ, которые число 30 преобразуют в число 54?

Решение

Самая простая программа состоит из 24 единиц.

Затем можно использовать команду 2, но только один раз. Затем, используя команду 1, получить искомое число.

Программа: 2111111111111111.

Выполнение: $30 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 54$.

Количество подобных программ будет определяться числом позиций, в которые можно поставить команду 2. Всего таких программ – 15.

Третья группа программ будет включать две команды увеличения десятков на один. Например:

Программа: 221111.

Выполнение: $30 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 = 54$.

Эти программы будут содержать две двойки и четыре единицы. Определим количество таких программ. Для этого достаточно подсчитать сколькими способами можно разместить две двойки на шести позициях.

Количество способов выбрать 2 позиции из 6 равно числу сочетаний:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$$

Суммируем все варианты: $15 + 15 + 1 = 31$.

Правильный ответ: 31.

(14 баллов)

5. Программирование

Вопрос 13

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <iostream> using namespace std; int main() { int a = 10, b = 20, c = 0; while (a < 50) { a = a + 5; if (a % 10 == 0) { c = c + a; } b = b - 2; } cout << c; return 0; }</pre>	<pre>a = 10 b = 20 c = 0 while a < 50: a = a + 5 if a % 10 == 0: c = c + a b = b - 2 print(c)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, c a := 10 b := 20 c := 0 <u>нц</u> <u>пока</u> a < 50 a := a + 5 <u>если</u> mod(a,10) = 0 <u>то</u> c := c + a <u>все</u> b := b - 2 <u>кц</u> <u>вывод</u> c <u>кон</u></pre>	<pre>var a, b, c: integer; begin a := 10; b := 20; c := 0; while a < 50 do begin a := a + 5; if a mod 10 = 0 then c := c + a; b := b - 2; end; writeln(c) end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи достаточно создать трассировочную таблицу и выполнить программу по шагам.

Выберем программу на языке Python. Пронумеруем строки программы, чтобы удобнее было фиксировать выполняемую строку.

```
01: a = 10
02: b = 20
03: c = 0
04: while a < 50:
05:     a = a + 5
06:     if a % 10 == 0:
07:         c = c + a
08:     b = b - 2
09: print(c)
```

Выполняем первые три строки ($a = 10$, $b = 20$, $c = 0$). Записываем в таблицу номер команды и результат ее выполнения, т. е. в столбцы a , b , c записываем 10, 20 и 0 соответственно.

Проверяем условие $a < 50$, т. к. a равно 10, то увеличиваем ее значение на 5 и записываем в таблицу. Проверяем условие $a \% 10 == 0$, т. е. последняя цифра значения переменной a равна нулю. Условие не выполняется, поэтому переходим к строке 08 и уменьшаем значение b на два.

Проверяем условие цикла. Поскольку a равно 15, то продолжаем выполнять команды в теле цикла. Увеличиваем значение переменной a на 5 и записываем в таблицу. Проверяем условие $a \% 10 == 0$. В этом случае условие истинно, поэтому значение переменной c увеличиваем на a (шаг 07). Значение переменной b уменьшаем на два.

Продолжаем выполнять команды в теле цикла (05–08) пока значение переменной a не достигло 50.

Выводится значение c , которое равно 140.

№	a	b	c
01	10		
02		20	
03			0
05	15		
08		18	
05	20		
07			20
08		16	
05	25		
08		14	
05	30		
07			50
08		12	
05	35		
08		10	
05	40		
07			90
08		8	
05	45		
08		6	
05	50		
07			140
08		4	

Правильный ответ: 140.

(5 баллов)

Вопрос 14

Запишите число, которое будет напечатано в результате выполнения следующей программы. Для вашего удобства программа представлена на четырех языках программирования.

Си	Python
<pre>#include <stdio.h> #include <stdlib.h> #include <math.h> int F(int x) { return abs(x + 15) + abs(x - 5) - 2 * abs(x + 10); } int main() { int a = -20; int b = 20; int M = a; int R = F(a); for (int t = a; t <= b; t++) { if (F(t) >= R) { M = t; R = F(t); } } printf("%d\n", M + R); return 0; }</pre>	<pre>def F(x): return abs(x + 15) + abs(x - 5) - 2 * abs(x + 10) a = -20 b = 20 M = a R = F(a) for t in range(a, b + 1): if F(t) >= R: M = t R = F(t) print(M + R)</pre>
Алгоритмический язык	Паскаль
<pre><u>алг</u> Программа <u>нач</u> <u>цел</u> a, b, M, R, t a := -20 b := 20 M := a R := F(a) <u>нц</u> для t от a до b <u>если</u> F(t) >= R <u>то</u> M := t R := F(t) <u>все</u> <u>кц</u> <u>вывод</u> M + R <u>кон</u> <u>алг</u> <u>цел</u> F(<u>цел</u> x) <u>нач</u> F := abs(x + 15) + abs(x - 5) - 2 * abs(x + 10) <u>кон</u></pre>	<pre>var a, b, M, R, t: integer; function F(x: integer): integer; begin F := abs(x + 15) + abs(x - 5) - 2 * abs(x + 10); end; begin a := -20; b := 20; M := a; R := F(a); for t := a to b do begin if F(t) >= R then begin M := t; R := F(t); end; end; end; writeln(M + R); end.</pre>

Решение

Для решения данной задачи можно составить трассировочную таблицу. Однако в ней будет довольно много строк.

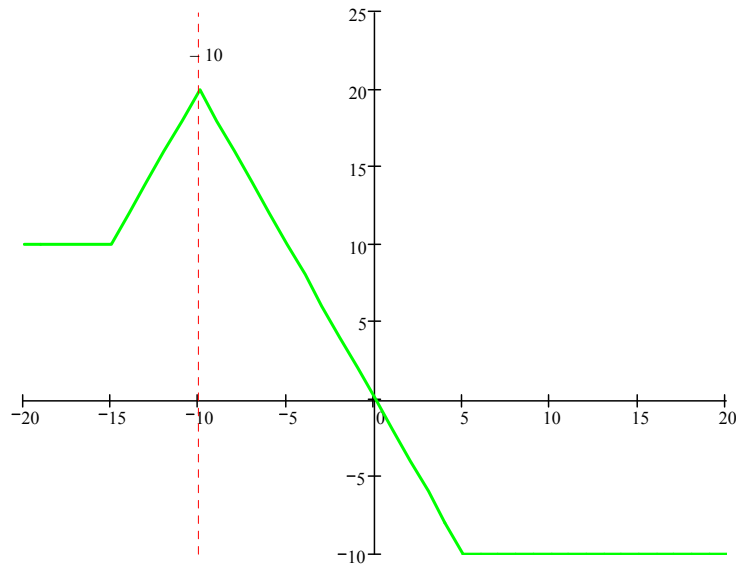
Проанализируем код. В цикле меняется значение переменной t от -20 до $+20$ с шагом 1. Для каждого значения переменной цикла проверяется условие:

$$F(t) \geq R,$$

где $F(t)$ – это значение функции при текущем значении переменной t , R – это значение функции в предыдущей точке.

Поскольку при истинности условия аргумент и значение функции сохраняются ($M = t$; $R = F(t)$), можно с уверенностью сказать, что ищется максимум функции. Построим график функции

$$F(x) = \text{abs}(x + 15) + \text{abs}(x - 5) - 2 * \text{abs}(x + 10).$$



Из графика видим, что максимум будет в точке $(-10, 20)$, т. е. $M = -10$ и $R = 20$. На экран выводится сумма этих значений.

Правильный ответ: 10.

(5 баллов)